БЕЛКООПСОЮЗ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БЕЛОРУССКИЙ ТОРГОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОЙ КООПЕРАЦИИ”

Кафедра информационно-вычислительных систем

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Практикум к лабораторным занятиям
для студентов экономических специальностей

В пяти частях

Часть 1

Гомель 2005

УДК 330.4
ББК 22.18
Э 40

Авторы-составители: О. И. Еськова, канд. техн. наук, доцент;
Т. А. Заяц, ассистент;
В. В. Бондарева, канд. техн. наук, доцент

Рецензенты: Е. А. Ружицкая, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики и программирования Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины;
Н. Г. Жевнова, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации;
И. В. Дубинина, ассистент кафедры информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации

Рекомендован к изданию научно-методическим советом УО “Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации”.
Протокол № 3 от 10 февраля 2004 г.

Э 40 **Экономико**-математические методы и модели : практикум к лабораторным занятиям для студентов экономических специальностей. В 5 ч. Ч. 1 / авт.-сост.: О. И. Еськова, Т. А. Заяц, В. В. Бондарева. – Гомель : УО “Белорусский торгово-экономический университет потребительской кооперации”, 2005. – 108.
ISBN 985-461-147-7

УДК 330.4
ББК 22.18

ISBN 985-461-147-7

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В современных экономических условиях планирование деятельности любой промышленной или торговой организации является сложной задачей, решение которой требует от специалистов не только управленческого опыта и знания законодательства, но и умения применять на практике методы экономико-математического моделирования. Курс "Экономико-математические методы и модели" преподается в вузах для студентов всех экономических специальностей и является неотъемлемой частью их профессиональной подготовки. Данный практикум предназначен для методического обеспечения тех разделов этого курса, которые непосредственно связаны с планированием и прогнозированием. При этом внимание уделяется в равной мере как математическим основам предлагаемых моделей, так и их экономическому содержанию и методике реализации в табличном процессоре MS Excel. Практикум состоит из трех разделов.

Первый раздел практикума посвящен моделям теории игр. Применение этих моделей позволяет планировать деятельность организации в условиях конкурентной борьбы, рыночных отношений и других конфликтных ситуациях, характеризующихся неопределенностью при принятии решений. Этот раздел включает две лабораторные работы. Первая из них знакомит студентов с основными понятиями теории игр и представляет методику решения в MS Excel стратегических игр в смешанных стратегиях. Вторая лабораторная работа посвящена решению игр с природой на основании различных критериев.

Во втором разделе рассматриваются методы и модели прогнозирования на основе временных рядов. Этот раздел включает четыре лабораторные работы, которые дают представление как о методах сглаживания, так и о трендовых моделях прогнозирования. Рассматриваются такие разнообразные возможности MS Excel для решения задач прогнозирования, как надстройки *Пакет анализа* и *Поиск решения*, стандартные функции и мастер диаграмм MS Excel. Обсуждаются особенности и ограничения в применении этих средств.

В третьем разделе практикума рассматриваются методы сетевого планирования и управления, применяемые при планировании сложных комплексов взаимосвязанных работ. Этой теме посвящены две лабораторные работы. В первой приводятся правила и методика построения сетевого графика, а также способы оценки временных параметров этого графика. Во второй лабораторной работе обсуждается задача оптимизации критического срока проекта путем перераспределения ресурсов между работами и предлагается способ ее решения в приложении MS Excel.

В каждой лабораторной работе приведены необходимые теоретические сведения, пример решения типовой задачи, варианты задач для самостоятельной работы студентов и контрольные вопросы по теме. Практикум может быть использован на занятиях по курсу "Экономико-математические методы и модели", а также для самостоятельной подготовки студентов.

1. МОДЕЛИ ТЕОРИИ ИГР

Лабораторная работа 1. Решение стратегических матричных игр

1.1. Основные теоретические сведения

1.1.1. Понятие игры, виды игр

В экономической и других сферах деятельности часто встречается проблема принятия управленческих решений в условиях неопределенности. При этом неопределенность может быть связана как с сознательными действиями противника, так и с другими факторами, влияющими на эффективность решения. Ситуации, в которых сталкиваются интересы двух и более конкурирующих сторон, преследующих разные цели, называются конфликтными. Математической теорией конфликтных ситуаций является теория игр.

Игрой называют математическую модель реальной конфликтной ситуации. В игре могут сталкиваться интересы двух (игра парная) или нескольких (игра множественная) противников; существуют игры с бесконечным множеством игроков. В данном пособии мы будем рассматривать только парные игры.

Игра ведется по определенным правилам. Каждый участник игры имеет несколько вариантов возможных действий (чистых стратегий). Из них он выбирает такие варианты, которые, как он полагает, могут обеспечить ему наилучший результат (исход игры). При этом каждый игрок имеет лишь общее представление о множестве допустимых ответных действий партнера, но не о его конкретном решении. В связи с этим ни один из игроков не может контролировать положение, поэтому как одному, так и другому игроку решение приходится принимать в условиях неопределенности. Непременным остается только стремление игроков использовать любую ошибку партнера в своих интересах. Игры, в которых оба участника, действуя в строгом соответствии с правилами, в равной мере сознательно стремятся добиться наилучшего для себя результата, называются *стратегическими*.

В экономической практике нередко приходится формализовать (моделировать) ситуации, в которых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют *статистическими* или играми с природой. Под термином "*природа*" понимают всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку приходится принимать решение.

Исход игры – это значение некоторой функции, называемой функцией выигрыша (платежной функцией). Платежная функция определяет для каждой совокупности выбранных игроками стратегий выигрыш каждой из сторон. Такая функция задается либо таблицей (платежная матрица), либо аналитическим выражением.

Если сумма выигрышей игроков равна нулю, то игру называют *игрой с нулевой суммой*. В случае парной игры это означает, что выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

1.1.2. Решение матричных игр в чистых стратегиях (принцип минимакса)

Парную игру с нулевой суммой удобно исследовать, если функция выигрыша задается платежной матрицей.

Пусть игроки А и В располагают конечным числом возможных действий – чистых стратегий. Обозначим их соответственно $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Игрок А может выбрать любую чистую стратегию A_i $(i=\overline{1,m})$, а игрок В может выбрать любую чистую стратегию B_j $(j=\overline{1,n})$. Пара стратегий (A_i, B_j) однозначно определяет результат игры a_{ij} (a_{ij} – выигрыш игрока А или проигрыш игрока В при условии, если игрок А придерживается своей чистой стратегии A_i, а игрок В – чистой стратегии B_j). Если известны значения исхода игры a_{ij} для каждой пары (A_i, B_j) чистых стратегий, то можно составить платежную матрицу выигрышей игрока А (проигрышей игрока В) (рис. 1.1).

	B_1	…	B_n	α_i
A_1	a_{11}	…	a_{1n}	α_1
…	…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mn}	α_m
β_j	β_1		β_n	

Рис. 1.1. **Платежная матрица игры**

Решить матричную игру означает определить наилучшую стратегию игрока А, а также наилучшую стратегию игрока В. Если рассматривается стратегическая игра, то предполагается, что противники одинаково разумны, и каждый из них делает все для того, чтобы добиться своей цели.

Используя этот принцип, найдем наилучшую стратегию игрока А. Выбирая стратегию A_i, мы должны рассчитывать, что игрок В ответит на нее той из своих стратегий B_j, для которой выигрыш игрока А будет минимальным. Найдем минимальное число a_{ij} в каждой строке матрицы:

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}\,(i=\overline{1,m}).$$

Эта величина есть гарантированный (самый малый) выигрыш игрока А при выборе им чистой стратегии A_i. Значения α_i обычно записываются в правом столбце платежной матрицы (см. рис. 1.1). Очевидно, что желающий перестраховаться игрок А должен предпочесть другим стратегиям ту, для которой гарантированный выигрыш α_i максимален.

Обозначим это максимальное значение $\alpha = \max_i \alpha_i$. Величина $\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}$ есть гарантированный выигрыш, который игрок А может получить в игре, и называется ***нижней ценой игры*** или ***максимином***. Стратегия, обеспечивающая игроку А получение нижней цены игры, называется ***максиминной стратегией***.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены по поводу действий игрока В. С его точки зрения, в платежной матрице приведены проигрыши. В каждом из столбцов он должен найти максимальное значение проигрыша при выборе стратегии B_j:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}\ (j=\overline{1,n}).$$

Значения β_j записываются в дополнительной строке платежной матрицы (см. рис. 1.1).

Выбирать стратегию игроку В следует так, чтобы минимизировать величину проигрыша при любых действиях соперника, т. е. обеспечить $\beta = \min_j \beta_j$. Величина $\beta = \min_j \beta_i = \min_j \max_i a_{ij}$ называется ***верхней ценой игры*** (***минимаксом***), а соответствующая ей чистая стратегия B_j – минимаксной.

Можно показать, что максимин не превосходит минимакс, т. е. $\alpha \le \beta$. Если в игре нижняя цена равна верхней ($\alpha = \beta$), то говорят, что игра имеет седловую точку и ***чистую цену игры*** $\gamma = \alpha = \beta$. Пару чистых стратегий (A_i^*, B_i^*), соотвествующих γ, называют седловой точкой матричной игры, а элемент a_{ij}^* платежной матрицы, стоящий на пересечении i^*-й строки и j^*-го столбца, – седловым элементом платежной матрицы. Он одновременно является минимальным в своей строке и максимальным в своем столбце. Стратегии A_i^* и B_i^*, образующие седловую точку, являются оптимальными. Значения $A_i^*; B_i^*; \gamma$ называют ***решением игры***.

Пример. В игре принимают участие два игрока. Каждый из игроков может записать независимо от другого цифру 4, 5 или 6. Если разность между цифрами, записанными игроками А и В положительна, то игрок А выигрывает количество очков, равное этой разности. Если разность отрицательна, то выигрывает игрок В. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью. Составить платежную матрицу и найти решение игры.

Решение. Составим платежную матрицу игры. Чистыми стратегиями игрока А будут: А1 – записать число 4; А2 – записать число 5; А3 – записать число 6. У игрока В чистыми будут аналогичные стратегии. Элемент матрицы $a_{11} = 0$, так как в ситуации (А1; В1) оба игрока записывают цифру 4 и выигрыш игрока А равен 4 – 4 = 0. В ситуации (А1; В2) выигрыш игрока А составит $a_{12} = 4–5 = –1$. Аналогичным образом вычисляются остальные элементы платежной матрицы (рис. 1.2).

	B_1(4)	B_2(5)	B_3(6)	α_i
A_1 (4)	0	–1	–2	–2
A_2 (5)	1	0	–1	–1
A_3 (6)	2	1	0^*	0
β_j	2	1	0	

Рис. 1.2. **Платежная матрица примера**

Определим минимальные гарантированные выигрыши игрока А, равные $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, при выборе им стратегий A_i. Так, если игрок А записал цифру 4, то его минимальный выигрыш при выборе данной стратегии составит $\alpha_1 = \min(0; –1; –2) = –2$. Аналогично находим $\alpha_2 = \min(1; 0; –1)= –1$, если игрок А записал цифру 5 и $\alpha_3 = \min(2; 1; 0) = 0$, если им записана цифра 6. Найдем нижнюю цену игры игрока А, воспользовавшись “принципом максимина”, т. е. $\alpha = \max\limits_i \alpha_i = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$. Нижняя цена игры для игрока А составит $\alpha = \max(–2; –1; 0) = 0$. Таким образом, максиминному выбору игрока А будет отвечать третья стратегия, гарантирующая выигрыш, равный нулю.

Для игрока В значения элементов $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}$ составят соответственно $\beta_1 = 2, \beta_2 = 1, \beta_3 = 0$. Верхняя чистая цена игры для игрока В по “принципу минимакса” составит $\beta = \min(2; 1; 0) = 0$. Следовательно, минимаксному выбору игрока В будет отвечать третья стратегия, гарантирующая минимальный проигрыш, равный нулю.

Так как $\alpha = \beta$, то данная игра имеет седловую точку, т. е. третья чистая стратегия игрока А и третья чистая стратегия игрока В образуют седловую точку со значением 0 и данная матричная игра имеет решение (A_3; B_3; 0).

1.1.3. Упрощение матричных игр

Если платежная матрица игры не содержит седловой точки, то задача определения оптимальной смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому для игр с платежными матрицами большой размерности отыскание решения можно несколько упростить, если уменьшить их размерность путем вычеркивания дублирующих и заведомо невыгодных стратегий.

Определение 1. Если в матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующие строкам (столбцам) стратегии называются ***дублирующими***.

Определение 2. Если в матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию A_i игрока А, не больше (меньше или равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия A_i называется ***заведомо невыгодной***.

Определение 3. Если в матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию B_j игрока В, не меньше (больше или равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия B_j называется ***заведомо невыгодной***.

Для того, чтобы перевести значения всех элементов платежной матрицы в область неотрицательных значений, нужно ко всем элементам матрицы добавить некоторое достаточно большое число L. При этом цена игры γ увеличится на L, а решение задачи не изменится.

Таким образом, платежную матрицу можно всегда преобразовать так, что ее элементы будут целыми неотрицательными числами, а это упрощает расчеты.

Пример. Выполнить возможные упрощения платежной матрицы:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (1.1)$$

Решение. Поскольку соответствующие элементы второй и четвертой строк матрицы (1.1) равны, то имеет место случай с дублирующими стратегиями. Следовательно, одну из строк можно убрать (например, четвертую). Элементы первой строки меньше соответствующих элементов второй строки, а элементы пятой строки меньше или равны соответствующим элементам третьей строки. Поэтому игроку А, стремящемуся максимизировать выигрыш, выгоднее применять стратегии A_2 и A_3, а не стратегии A_1 и A_5. В связи с этим опустим первую и пятую строки, получим платежную матрицу (1.2):

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}. \qquad (1.2)$$

В преобразованной матрице (1.2) элементы первого и второго столбцов больше соответствующих элементов четвертого столбца. Поэтому игроку В, стремящемуся минимизировать проигрыш, стратегии B_1 и B_2 являются заведомо невыгодными. В связи с этим опустим первый и второй столбцы. По аналогичной причине после сравнения пятого и третьего столбцов опускаем пятый столбец. В результате приходим к матрице (1.3):

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}. \qquad (1.3)$$

Далее, для того, чтобы перевести элементы матрицы (1.3) в область неотрицательных значений добавим к каждому из них число 4. Получим матрицу (1.4):

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.4)$$

Сравнивая вновь строки полученной матрицы, заключаем, что дальнейшему упрощению она не подлежит.

1.1.4. Решение матричных игр без седловых точек

Если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу минимакса (матричная игра решается в чистых стратегиях). Если же платежная матрица не имеет седловой точки, т. е. $\alpha < \beta$, то решением для каждого игрока будет сложная стратегия, состоящая в случайном применении им двух и более чистых стратегий.

Если в процессе игры игрок применяет попеременно несколько чистых стратегий с определенными частотами, то такая стратегия игрока называется ***смешанной***.

Однако, следует отметить, что применение игроками смешанных стратегий имеет смысл только тогда, когда данная игра проводится ими многократно. В случае однократно проводимой игры, не имеющей седловой точки, дать какие-либо содержательные рекомендации игрокам не представляется возможным.

Смешанной стратегией игрока А называется вектор $\overline{p} = (p_1;\ p_2;\ \ldots,\ p_m)$, где p_i – вероятность, с которой игрок А выбирает свою чистую стратегию A_i. Компоненты вектора p удовлетворяют условиям: $p_i \ge 0$ ($i = \overline{1,m}$), $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Смешанной стратегией игрока В называют вектор $\overline{q} = \ = (q_1; q_2; \ldots; q_n)$, где q_i – вероятность применения игроком В его чистой стратегии B_j. При этом $q_j \ge 0$ ($j = \overline{1,n}$), $\sum_{i=1}^{n} q_j = 1$.

Решить задачу в смешанных стратегиях означает найти такие оптимальные смешанные стратегии $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$, которые доставляют игроку А максимальный средний выигрыш, а игроку В – минимальный средний проигрыш.

Ценой игры γ при решении в смешанных стратегиях называется величина среднего выигрыша игрока А (среднего проигрыша В), приходящегося на одну партию. Стратегии игроков, входящие в их оптимальные смешанные стратегии, называются ***активными***.

Можно показать, что цена игры всегда удовлетворяет условию:

$$\alpha \le \gamma \le \beta .$$

Следовательно, если каждый игрок придерживается своих смешанных стратегий при многократном повторении игры, то он получает более выгодный для себя результат, чем применяя “перестраховочные” стратегии, соответствующие α и β. Каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, так как ему это невыгодно.

1.1.5. Решение матричной игры путем сведения к задаче линейного программирования

Пусть платежная матрица игры не содержит седловой точки, следовательно, игра решается в смешанных стратегиях.

Будем считать, что все элементы платежной матрицы неотрицательны (если это не так, то можно воспользоваться правилом перевода элементов матрицы в область неотрицательных значений (см. п. 1.3). Следовательно, можно принять, что $\gamma > 0$.

Применение игроком А оптимальной смешанной стратегии $\overline{p^*} = (p_1; p_2; ...; p_m)$ гарантирует ему, независимо от поведения игрока В, выигрыш, не меньший цены игры γ.

Если игрок А применяет свою оптимальную стратегию $\overline{p^*}$, а игрок В свою чистую стратегию B_j, то средний выигрыш игрока А будет равен:

$$\gamma_j = a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{ij}p_i + ... + a_{mj}p_m, \quad (j = \overline{1,n}).$$

Учитывая, что γ_j не может быть меньше γ, можем записать условие:

$$a_{1j}p_1 + a_{2j}p_2 + ... + a_{ij}p_i + ... + a_{mj}p_m \ge \gamma, (j = \overline{1,n}). \qquad (1.5)$$

Разделив левую и правую части неравенства (1.5) на цену игры $\gamma > 0$, получим:

$$a_{1j}\frac{p_1}{\gamma} + a_{2j}\frac{p_2}{\gamma} + ... + a_{ij}\frac{p_i}{\gamma} + ... + a_{mj}\frac{p_m}{\gamma} \ge 1, \ (j = \overline{1,n}). \qquad (1.6)$$

Введем новые обозначения:

$$\frac{p_i}{\gamma} = x_i, \ (i = \overline{1,m}). \qquad (1.7)$$

Тогда неравенства (1.6) запишутся в виде:

$$a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + ... + a_{ij}x_i + ... + a_{mj}x_m \ge 1, \ (j = \overline{1,n}). \qquad (1.8)$$

где $x_i \ge 0$, так как $p_i \ge 0$, $\gamma > 0$.

Компоненты вектора p удовлетворяют следующему условию:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1.$$

Учитывая соотношение (1.7) получим, что переменные x_i удовлетворяют условию:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{\gamma}.$$

Учитывая, что игрок А стремится максимизировать γ, получаем линейную функцию

$$F = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \min . \qquad (1.9)$$

Таким образом, приходим к следующей задаче линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных x_i $(i = \overline{1,m})$, минимизирующие линейную функцию (1.9) и удовлетворяющие ограничениям (1.8):

$$F = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min,$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1, (j = \overline{1,n}); \\ x_i \ge 0, (i = \overline{1,m}). \end{cases}$$

Решив данную задачу, найдем цену игры $\gamma = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i}$ и вероятность применения игроком А его чистых стратегий $p_i = \dfrac{x_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i}$ $(i = \overline{1,m})$.

Аналогично для игрока В нужно решить двойственную задачу:

$$F_Д = \sum_{j=1}^{n} z_j \to \max,$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \le 1, (i = \overline{1,m}); \\ z_j \ge 0, (j = \overline{1,n}). \end{cases}$$

Решив двойственную задачу, найдем вероятности применения игроком В его чистых стратегий из выражения:

$$q_j = \frac{z_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} z_j} = \frac{z_j}{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i}, (j = \overline{1,n}).$$

1.2. Пример решения задачи

Решить игру, представленную платежной матрицей:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Порядок выполнения работы

Прежде всего проверим, имеет ли игра седловую точку. Для каждой стратегии игрока А найдем наименьший выигрыш $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$ $(i = \overline{1,5})$ и запишем в соответствующий столбец:

	B_1	B_2	B_3	B_4	α_i
A_1	3	1	9	5	1
A_2	1	5	7	0	0
A_3	0	4	5	–1	–1
A_4	1	5	7	0	0
A_5	4	–2	5	2	–2
β_j	4	5	9	5	

Рис. 1.3. **Платежная матрица примера**

Аналогично для каждой стратегии игрока В максимальный проигрыш $\beta_j = \max\limits_i a_{ij}, (j = \overline{1,4})$. Нижняя цена игры (максимин):

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{1, 0, -1, 0, -2\} = 1.$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{4, 5, 9, 5\} = 4.$$

Максиминная (перестраховочная) стратегия игрока А есть стратегия A_1. Применяя эту стратегию игрок А получит выигрыш не менее 1. Минимаксная (перестраховочная) стратегия игрока В есть стратегия B_1. Применяя эту стратегию, он проиграет не больше 4.

Так как $\alpha \ne \beta$, будем решать игру в смешанных стратегиях. Цена игры при этом удовлетворяет условию $1 \le \gamma \le 4$.

Решение игры в смешанных стратегиях начинают с упрощения платежной матрицы и перевода всех ее элементов в область целых неотрицательных значений.

Поскольку соответствующие элементы второй и четвертой строк равны, то имеет место случай с дублирующими стратегиями. Следовательно, одну из строк можно убрать (например, четвертую). Элементы третьей строки меньше соответствующих элементов второй строки. Поэтому игроку А, стремящемуся максимизировать выигрыш, выгоднее применять стратегию A_2, а не стратегию A_3. В связи с этим опустим третью строку. Преобразованная матрица будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Элементы третьего столбца больше соответствующих элементов первого столбца. Поэтому стратегия B_3 является для игрока В заведомо невыгодной. Опустим третий столбец и получим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Анализируя эту матрицу, делаем вывод, что дальнейшему упрощению она не подлежит.

Для решения игры путем сведения к задаче линейного программирования, переведем элементы матрицы в область целых неотрицательных значений. Для этого прибавим к каждому элементу матрицы число 2 и получим следующую матрицу:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Составим задачу линейного программирования для игрока А:

$$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 \ge 1; \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 1; \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 1; \\ x_i \ge 0, \ (i = \overline{1,3}). \end{cases} \qquad (1.10)$$

Для игрока В имеем двойственную задачу:

$$F_Д = z_1 + z_2 + z_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5z_1 + 3z_2 + 7z_3 \le 1; \\ 3z_1 + 7z_2 + 2z_3 \le 1; \\ 6z_1 + 4z_3 \le 1; \\ z_j \ge 0 \ (j = \overline{1,3}). \end{cases} \qquad (1.11)$$

Для решения задачи (1.10) воспользуемся надстройкой Excel *Поиск решения*. Подготовьте исходные данные на листе Excel как показано на рис. 1.4.

	A	B	C	D	E	F
1	Платежная матрица					
2	5	3	7		x1	0
3	3	7	2		x2	0
4	6	0	4		x3	0
5	Левые части ограничений					
6	=СУММПР	=СУММПР	=СУММПР		Цель	=СУММ(F2:F4)
7						

Рис. 1.4. **Исходные данные для решения матричной игры**

Ячейки F2:F4 отведены под значения переменных x_i. В них введены начальные приближения, равные нулю. В ячейке F6 находится формула целевой функции (сумма переменных). В ячейках A6:C6 – формулы левых частей ограничений:

- A6: =СУММПРОИЗВ(A2:A4;$F$2:$F$4);
- B6: =СУММПРОИЗВ(B2:B4;$F$2:$F$4);
- C6: =СУММПРОИЗВ(C2:C4;$F$2:$F$4).

Формулу ячейки A6 в ячейки B6:C6 можно скопировать методом автозаполнения.

Вызовем надстройку *Поиск решения* и заполним диалоговое окно как показано на рис. 1.5 (необходимо также установить флажок *Линейная модель*, нажав кнопку *Параметры*).

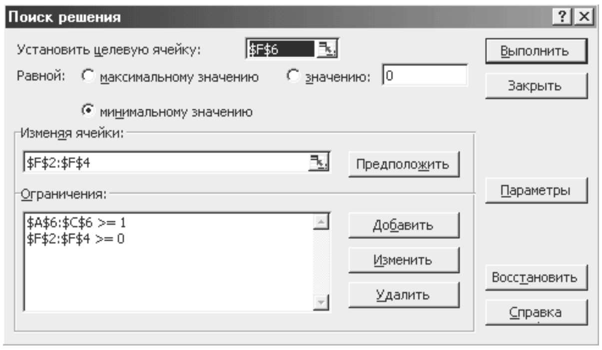

Рис. 1.5. **Окно *Поиск решения* для решения матричной игры**

Нажмем кнопку *Выполнить*, получим сообщение об успешном решении задачи и выберем в списке *Тип отчета* пункт *Устойчивость*. Переключатель должен быть установлен в положение *Сохранить найденное решение*. После нажатия кнопки *OK* Excel сформирует отдельный лист рабочей книги, содержащий отчет по устойчивости. Отчет по устойчивости требуется для того, чтобы не решать заново двойственную задачу: оптимальные значения двойственных переменных z_j^* приведены в графе *Теневая цена* этого отчета. Скопируем ячейки, содержащие значение теневой цены, на лист с исходными данными задачи в ячейки B8:B10 (рис. 1.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Платежная матрица							
2	5	3	7		x1	0,15385	p1	0,66667
3	3	7	2		x2	0,07692	p2	0,33333
4	6	0	4		x3	0	p3	0
5	Левые части ограничений							
6	1	1	1,23077		Цель	0,23077		
7								
8	z1	0,15385	q1	0,66667	Цена игры	2,33333		
9	z2	0,07692	q2	0,33333				
10	z3	0	q3	0				

Рис. 1.6. **Результаты решения игры**

Найдем вероятности применения игроком А чистых стратегий по формуле

$$p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

Для этого в ячейке H2 запишем формулу для нахождения p_1:

= F2/$F$6.

Вероятности p_2 и p_3 находятся аналогично, поэтому скопируем формулу из ячейки H2 в ячейки H3 и H4 с помощью автозаполнения.

Итак, $p_1 = \frac{0{,}154}{0{,}231} = 0{,}667$, $p_2 = \frac{0{,}077}{0{,}231} = 0{,}333$, $p_3 = \frac{0}{0{,}231} = 0$.

Вероятности применения игроком В чистых стратегий Вj находим по формуле

$$q_j = \frac{z_j}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

Для этого в ячейку D8 запишем формулу для нахождения q_1:

= B8/$F$6.

Вероятности q_2 и q_3 находятся аналогично, поэтому скопируем формулу из ячейки D8 в ячейки D9 и D10 с помощью маркера автозаполнения.

Итак, $q_1 = \frac{0{,}154}{0{,}231} = 0{,}667$; $q_2 = \frac{0{,}077}{0{,}231} = 0{,}333$; $q_3 = \frac{0}{0{,}231} = 0$.

Цену игры найдем по формуле

$$\gamma = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$

Однако это будет цена игры для преобразованной матрицы. Чтобы вернуться к исходной задаче, нужно вычесть 2 из γ (так как ранее мы прибавляли двойку ко всем элементам платежной матрицы, а это увеличивает цену игры на 2). Итак, в ячейку F8 запишем формулу

=1/F6–2.

Получим, что цена игры равна 2,33. Учитывая, что для данной задачи $\alpha = 1$, а $\beta = 4$, убеждаемся, что условие $\alpha \le \gamma \le \beta$ выполнено.

Окончательно возвращаясь к исходной задаче, необходимо вспомнить, какие стратегии игроков А и В мы посчитали заведомо невыгодными и вычеркнули из платежной матрицы. Этим стратегиям, очевидно, соответствуют вероятности, равные нулю. Итак, для исходной платежной матрицы имеем следующие смешанные стратегии:

- игрока А: $\overline{p^*} = (0{,}667; 0{,}333; 0; 0; 0)$;
- игрока В: $\overline{q^*} = (0{,}667; 0{,}333; 0; 0)$.

Полученные результаты можно сформулировать так: в случае многократного повторения игры игроку А для получения максимально возможного среднего выигрыша, равного 2,33, следует в приблизительно 67 % случаев применять первую стратегию, и в 33 % случаев – вторую. Например, если игра повторяется 100 раз, то 67 раз он должен применить первую стратегию и 33 раза – вторую. Остальные стратегии игроку А применять невыгодно.

Что касается игрока В, то он должен также применять свои первую и вторую стратегии в 67 % случаев и 33 % случаев соответственно. При этом его средний проигрыш будет 2,33, что значительно меньше верхней цены игры $\beta = 4$.

1.3. Задания для самостоятельной работы

Решить матричную игру, заданную платежной матрицей, сведя ее к паре двойственных задач линейного программирования. Предварительно произвести возможные упрощения платежной матрицы.

Вариант 1.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}17$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0{,}83$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0{,}83$, $q_5 = 0{,}17$, цена игры = 1,83.

Вариант 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}67$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0{,}33$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0{,}5$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0{,}5$, $q_4 = 0$, $q_5 = 0$, цена игры = 1.

Вариант 3.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & -6 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2=0{,}67$, $p_3 = 0{,}33$, $p_4 = 0$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0{,}67$, $q_4 = 0{,}33$, $q_5 = 0$, цена игры = 2,67.

Вариант 4.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0{,}71$, $p_4 = 0{,}29$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0{,}14$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0{,}86$, $q_5 = 0$, цена игры = 3,29.

Вариант 5.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 4 & 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}43$, $p_3 = 0{,}5$, $p_4 = 0$, $p_5 = 0{,}07$, $q_1 = 0{,}14$, $q_2 = 0{,}29$, $q_3 = 0{,}57$, $q_4 = 0$, $q_5 = 0$, цена игры = 2,43.

Вариант 6.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0{,}14$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0{,}86$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0{,}57$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0{,}43$, $q_4 = 0$, цена игры = 1,43.

Вариант 7.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}29$, $p_3 = 0$, $p_3 = 0{,}71$, $p_5 = 0$, q_1=0,14, $q_2 = 0{,}86$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0$, цена игры = 1,29.

Вариант 8.

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 9 & 5 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $p_1 = 0$, $p_2 = 0{,}67$, $p_3 = 0{,}33$, $p_4 = 0$, $p_5 = 0$, $q_1 = 0{,}67$, $q_2 = 0{,}33$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0$, цена игры = 2,33.

Контрольные вопросы

1. Что такое игра? Какие бывают виды игр?
2. Поясните понятия “чистая стратегия”, “исход игры”, “платежная матрица”. Что значит решить матричную игру?
3. Принцип минимакса. Нижняя и верхняя цена игры.
4. Когда существует решение игры в чистых стратегиях? Что такое седловая точка матричной игры?

5. Как можно упростить платежную матрицу игры? Какие стратегии называются заведомо невыгодными?

6. Что такое смешанные стратегии игроков? Что означает решить матричную игру в смешанных стратегиях?

7. Что такое цена игры в случае решения задачи в чистых стратегиях? А в случае решения в смешанных стратегиях?

8. Поясните смысл неравенства $\alpha \le \gamma \le \beta$.

9. К решению каких задач линейного программирования сводится решение матричной игры?

10. Поясните, почему целевая функция задачи линейного программирования для игрока А должна быть минимизирована.

11. Какой должна быть платежная матрица игры, чтобы ее можно было свести к задаче линейного программирования?

Лабораторная работа 2.
Решение статистических игр

2.1. Основные теоретические сведения

В экономической практике нередко приходится моделировать ситуации, придавая им игровую схему, в которых один из участников безразличен к результату игры. Такие игры называют статистическими, или играми с природой, понимая под термином “*природа*” всю совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку приходится принимать решение.

В играх с природой степень неопределенности при принятии решения сознательным игроком возрастает. Объясняется это тем, что, если в стратегических играх каждый из участников постоянно ожидает наихудшего для себя ответного действия партнера, то “природа”, будучи безразличной в отношении выигрыша, может предпринимать такие ответные действия, которые выгодны сознательному игроку.

Поскольку игры с природой являются частным случаем парных матричных игр, то вся теория стратегических игр переносится и на игры с природой. Однако игры с природой обладают и некоторыми особенностями. Например, при упрощении платежной матрицы отбрасывать те или иные состояния природы нельзя, так как она может реализовать любое состояние независимо от того, выгодно это игроку А или нет. Другая особенность состоит в том, что решение достаточно найти только для игрока А, поскольку природа наши рекомендации воспринять не может. И еще одна важная особенность: в играх с природой смешанные стратегии имеют ограниченное (главным образом теоретическое) значение: не всегда можно для них найти форму, удобную для использования в реальной обстановке. Смешанные стратегии приобретают смысл при многократном повторении игры.

Игра с природой задается платежной матрицей, в которой строки соответствуют стратегиям игрока, а столбцы – состояниям “природы” (рис. 1.7).

	$П_1$	…	$П_n$
A_1	a_{11}	…	a_{1n}
…	…	…	…
A_m	a_{m1}	…	a_{mn}
β_j	β_1	…	β_n

Рис. 1.7. **Платежная матрица игры с природой**

Кроме платежной матрицы, для игры с природой часто составляют матрицу рисков, которая во многих случаях позволяет более глубоко понять неопределенную ситуацию. *Риском* называется разность между максимально возможным выигрышем при данном состоянии природы и выигрышем, который будет получен при применении стратегии A_i в тех же условиях. Максимальный выигрыш в j-м столбце обозначим через β_j, т. е. $\beta_j = \max_i a_{ij}$ (величина β_j характеризует благоприятность состояния природы). Риск игрока при применении им стратегии A_i в условиях $П_j$ обозначим через r_{ij}. Тогда риск равен

$$r_{ij} = \beta_j - a_{ij},$$

где $r_{ij} \ge 0$.

Определение наилучшей стратегии сознательного игрока А в игре с природой основано на применении некоторых критериев для принятия решений. Применяются две группы критериев:

1. Критерии, основанные на известных вероятностях состояний природы. К этой группе относятся критерии Байеса и Лапласа.

2. Критерии, используемые в условиях полной неопределенности. Ко второй группе критериев относятся критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

Критерий Байеса

Если на основе данных статистических наблюдений можно определить вероятности состояний “природы” q_j ($q_j \geq 0, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$), то пользуются критерием Байеса. Согласно этому критерию оптимальной считается та чистая стратегия A_i, которая соответствует максимальному среднему значению (математическому ожиданию) выигрыша:

$$\bar{\alpha} = \max_i \bar{\alpha}_i = \max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \right\}.$$

Аналогично можно выбрать стратегию, которая обеспечивает минимальное среднее значение риска:

$$\bar{r} = \min_i \bar{r}_i = \min_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j \right\}.$$

Критерий Лапласа

Если игроку А представляются в равной мере правдоподобными все состояния $П_j$ природы, то полагают $q_1 = \ldots = q_n = 1/n$ и, учитывая “принцип недостаточного основания” Лапласа, оптимальной считают чистую стратегию A_i, обеспечивающую максимальный средний выигрыш:

$$\bar{\alpha} = \max_i \bar{a}_i = \max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Если вероятности q_j состояний природы совсем неизвестны и нельзя сделать о них никаких предположений, то пользуются критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

Максиминный критерий Вальда

Согласно критерию Вальда, оптимальной считается та стратегия игрока А, которая гарантирует в наихудших условиях максимальный выигрыш:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Критерий Вальда выражает позицию *крайнего пессимизма*, и принимаемое решение носит заведомо перестраховочный характер.

Критерий Сэвиджа (минимаксного риска)

Выбирается та стратегия, которая в наихудших условиях дает наименьший риск:

$$r = \min_i \max_j r_{ij}.$$

Критерий минимаксного риска Сэвиджа также является критерием крайнего пессимизма.

Критерий обобщенного максимума Гурвица

Оптимальной по критерию Гурвица считается чистая стратегия A_i, найденная из условия:

$$s = \max_i (\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \max_j a_{ij}),$$

где λ – коэффициент пессимизма, принимающий значения $0 \leq \lambda \leq 1$.

При $\lambda = 1$ критерий Гурвица превращается в критерий Вальда (критерий “крайнего пессимизма”), а при $\lambda = 0$ – в критерий “крайнего оптимизма”, когда рекомендуется выбирать стратегию, обеспечивающую самый большой выигрыш. В связи с этим критерий Гурвица называют критерием “*пессимизма-оптимизма*”.

Величина λ выбирается из опыта и здравого смысла. Чем ответственнее ситуация, чем больше стремление подстраховаться в ней и не рисковать без должных оснований, тем ближе к единице выбирается коэффициент пессимизма.

2.2. Пример решения задачи

Туристическая фирма “Топ-Тур” реализует туристические путевки. Объем реализации путевок изменяется в зависимости от потребительского спроса в пределах от 6 до 9 ед. Если путевок меньше, чем требует спрос на них, то фирма может заказать недостающее количество. При этом возникнут дополнительные расходы в размере 5 усл. ед. за каждую новую путевку. А если количество путевок превышает спрос, то потери за невостребованную путевку составят 6 усл. ед. Прибыль от реализации одной путевки составляет 10 усл. ед.

Требуется определить, какое количество путевок выгоднее брать на реализацию.

Порядок выполнения работы

В данном примере первым игроком является руководство туристической фирмы, которое может принять одно из решений:

а) А1 – заказать 6 путевок;
б) А2 – заказать 7 путевок;
в) А3 – заказать 8 путевок;
г) А4 – заказать 9 путевок.

Потребительский спрос выступает в качестве второго игрока, “природы”, стратегии которой определяются данными спроса, т. е.:

а) стратегия П1 – “купят 6 путевок”;
б) стратегия П2 – “купят 7 путевок”;
в) стратегия П3 – “купят 8 путевок”;
г) стратегия П4 – “купят 9 путевок”.

Построим платежную матрицу игры (рис. 1.8).

	П1 = 6	П2 = 7	П3 = 8	П4 = 9
А1 = 6	60	65	70	75
А2 = 7	54	70	75	80
А3 = 8	48	64	80	85
А4 = 9	42	58	74	90

Рис. 1.8. **Платежная матрица**

Рассчитаем элементы a_{ij} платежной матрицы игры.

Выигрыш игрока А (руководства фирмы), если он заказал 6 путевок (А1 = 6), а спрос оказался равным также 6 (П1 = 6) будет равен:

$$a_{11} = 6 \cdot 10 = 60 \text{ усл. ед.},$$

где 6 · 10 – прибыль от реализации шести путевок.

Выигрыш игрока А, когда заказано А1 = 6 путевок, а спрос П2 = 7 путевок:

$$a_{12} = 7 \cdot 10 - 1 \cdot 5 = 70 - 5 = 65 \text{ усл. ед.},$$

где 7 · 10 – прибыль от реализации семи путевок;
1 · 5 – затраты, связанные с заказом дополнительной путевки.

Аналогично рассчитаем элемент a_{13}, когда заказано А1 = 6 путевок, а спрос составил П3=8 путевок :

$$a_{13} = 8 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = 80 - 10 = 70 \text{ усл. ед.},$$

где 8 · 10 – прибыль от реализации восьми путевок;
2 · 5 – затраты, связанные с заказом двух дополнительных путевок.

Когда заказано А1 = 6 путевок, а спрос П4 = 9 путевок, выигрыш игрока А:

$$a_{14} = 9 \cdot 10 - 3 \cdot 5 = 90 - 15 = 75 \text{ усл. ед.}$$

Рассчитаем элемент a_{21}, когда заказано А2 = 7 путевок, а спрос составил П1 = 6 путевок:

$$a_{21} = 6 \cdot 10 - 1 \cdot 6 = 60 - 6 = 54 \text{ усл. ед},$$

где 6 · 10 – прибыль от реализации шести путевок;
1 · 6 – потери за одну невостребованную путевку.

Остальные элементы платежной матрицы вычисляются аналогично:

$a_{22} = 7 \cdot 10 = 70$ усл. ед.;
$a_{23} = 8 \cdot 10 - 1 \cdot 5 = 80 - 5 = 75$ усл. ед.;
$a_{24} = 9 \cdot 10 - 2 \cdot 5 = 90 - 10 = 80$ усл. ед.;
$a_{31} = 6 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 60 - 12 = 48$ усл. ед.;
$a_{32} = 7 \cdot 10 - 1 \cdot 6 = 70 - 6 = 64$ усл. ед.;
$a_{33} = 8 \cdot 10 = 80$ усл. ед.;
$a_{34} = 9 \cdot 10 - 1 \cdot 5 = 90 - 5 = 85$ усл. ед.;
$a_{41} = 6 \cdot 10 - 3 \cdot 6 = 60 - 18 = 42$ усл. ед.;
$a_{42} = 7 \cdot 10 - 2 \cdot 6 = 70 - 12 = 58$ усл. ед.;
$a_{43} = 8 \cdot 10 - 1 \cdot 6 = 80 - 6 = 74$ усл. ед.; $a_{44} = 9 \cdot 10 = 90$ усл. ед.

Так как вероятности состояния спроса заранее нам не известны, использовать критерии Байеса и Лапласа невозможно. Найдем решение игры по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица ($\lambda = 0,7$).

Критерий Вальда

Найдем элементы $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ (минимальный выигрыш, соответствующий стратегии A_i) и запишем их в дополнительный столбец матрицы игры. Максимальная из этих величин равна $\alpha_1 = 60$, следовательно, оптимальной является стратегия A_1, т. е. необходимо заказать 6 путевок.

	П1 = 6	П2 = 7	П3 = 8	П4 = 9	α_i
A1 = 6	60	65	70	75	60
A2 = 7	54	70	75	80	54
A3 = 8	48	64	80	85	48
A4 = 9	42	58	74	90	42
β_j	60	70	80	90	

Рис. 1.9. **Платежная матрица**

Критерий Сэвиджа

Пересчитаем платежную матрицу (рис. 1.9) в матрицу рисков. Для этого найдем максимальный элемент по каждому столбцу (β_j) и из него последовательно вычтем каждый элемент этого столбца. Получим матрицу рисков (рис. 1.10).

	П1 = 6	П2 = 7	П3 = 8	П4 = 9	r_i
A1 = 6	0	5	10	15	15
A2 = 7	6	0	5	10	10
A3 = 8	12	6	0	5	12
A4 = 9	18	12	6	0	18

Рис. 1.10. **Матрица рисков**

Затем найдем максимальный риск при выборе игроком А той или иной стратегии (максимальный элемент строки) и поместим его в правом добавочном столбце матрицы рисков (столбец r_i):

$$r_i = \max_j r_{ij}.$$

Найдем минимальную из величин r_i, которая равна 10. Следовательно, по критерию Сэвиджа оптимальной является стратегия A_2, т. е. заказать 7 путевок.

Критерий Гурвица

Добавим в платежную матрицу три дополнительных столбца:

1. $\min_j a_{ij}$ – столбец минимальных выигрышей игрока А при выборе им той или иной стратегии.
2. $\max_j a_{ij}$ – столбец максимальных выигрышей игрока А при выборе им той или иной стратегии.
3. *Критерий* – столбец, элементы которого рассчитываются по формуле

$$s_i = \lambda \cdot \min_j a_{ij} + (1-\lambda) \cdot \max_j a_{ij},$$

где $\lambda = 0{,}7$.

Из столбца *Критерий* (рис. 1.11) выбираем наибольшее значение. Таким является число 6,45, соответствующее стратегии A_1. Следовательно, по критерию Гурвица, оптимальной является первая стратегия игрока А (заказать 6 путевок).

	П1 = 6	П2 = 7	П3 = 8	П4 = 9	$\min_j a_{ij}$	$\max_j a_{ij}$	Критерий
A1 = 6	60	65	70	75	60	75	6,45
A2 = 7	54	70	75	80	54	80	6,18
A3 = 8	48	64	80	85	48	85	5,91
A4 = 9	42	58	74	90	42	90	5,64

Рис. 1.11. **Платежная матрица**

Итак, в результате применения критериев Вальда, Сэвиджа и Гурвица оптимальной считается первая стратегия, так как она являлась наилучшей при применении двух критериев из трех. Согласно первой стратегии нужно заказать 6 путевок.

Критерий Байеса

Если предположить, что вероятности состояний “природы” (в нашем случае спроса) известны и равны соответственно $q_1 = 0{,}4$; $q_2 = 0{,}2$; $q_3 = 0{,}3$; $q_4 = 0{,}1$, то можно воспользоваться критерием Байеса.

Для каждой строки, соответствующей стратегии сознательного игрока А, найдем сумму произведений вероятностей состояний природы q_i на элементы соответствующих столбцов. Для расчета среднего выигрыша можно воспользоваться пакетом MS Excel (рис. 1.12 и 1.13).

	A	B	C	D	E	F
1		П1=6	П2=7	П3=8	П4=9	Среднее
2	A1=6	60	65	70	75	=СУММПРОИЗВ(B2:E2;$B$6:$E$6)
3	A2=7	54	70	75	80	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;$B$6:$E$6)
4	A3=8	48	64	80	85	=СУММПРОИЗВ(B4:E4;$B$6:$E$6)
5	A4=9	42	58	74	90	=СУММПРОИЗВ(B5:E5;$B$6:$E$6)
6	q_i	0,4	0,2	0,3	0,1	

Рис. 1.12. **Формулы расчета по критерию Байеса в MS Excel**

Затем в столбце *Среднее* выберем максимальное значение. Это значение находится во второй строке (66,1). Следовательно, по критерию Байеса оптимальной является вторая стратегия игрока А (заказать 7 путевок).

	A	B	C	D	E	F
1		П1=6	П2=7	П3=8	П4=9	Среднее
2	A1=6	60	65	70	75	65,5
3	A2=7	54	70	75	80	66,1
4	A3=8	48	64	80	85	64,5
5	A4=9	42	58	74	90	59,6
6	q_i	0,4	0,2	0,3	0,1	

Рис. 1.13. **Результаты решения по критерию Байеса в MS Excel**

Критерий Лапласа

Если известно, что все состояния спроса равновероятны, то можно применить критерий Лапласа. Согласно этому критерию, нужно вычислить средний выигрыш как среднее арифметическое по строке:

$\overline{\alpha}_1 = (60 + 65 + 70 + 75)/4 = 67{,}5$; $\overline{\alpha}_2 = (54 + 70 + 75 + 80)/4 = 69{,}75$;

$\overline{\alpha}_2 = (48 + 64 + 80 + 85)/4 = 69{,}25$; $\overline{\alpha}_2 = (42 + 58 + 74 + 90)/4 = 66$.

Наибольший средний выигрыш составит:

$$\alpha = \max_i \overline{\alpha}_i = \max\{67{,}5;\, 69{,}75;\, 69{,}25;\, 66\} = 69{,}75\,.$$

Таким образом, и в этом случае предпочтение следует отдать второй стратегии.

2.3. Задания для самостоятельной работы[*]

Вариант 1. После 15 лет эксплуатации промышленное оборудование в количестве 10 единиц может оказаться в одном из следующих состояний:

1) требуется незначительный ремонт;
2) необходимо заменить отдельные детали;
3) дальнейшая эксплуатация возможна только после капитального ремонта.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство может принять следующие решения:

- произвести ремонт своими силами, что потребует затрат, равных 2, 6 и 10 усл. ед. за каждую единицу оборудования в зависимости от состояния оборудования;
- произвести ремонт при помощи специалистов-ремонтников, что вызовет затраты 10, 4 и 8 усл. ед. за единицу оборудования;
- заменить оборудование новым, на что будет израсходовано соответственно 14, 12 или 6 усл. ед. за единицу оборудования. Используя игровой подход, высказать рекомендации по оптимальному образу действий руководства предприятия.

Ответ: произвести ремонт своими силами.

Вариант 2. На технологическую линию поступает сырье с малым, большим количеством примесей и совсем без примесей. Линия может работать в трех режимах. Доход предприятия от реализации единицы продукции, изготовленной из сырья первого вида при трех режимах работы технологической линии, составляет соответственно 2, 5 и 6 усл. ед., из сырья второго вида – 4, 6 и 3 усл. ед. и из сырья третьего вида

[*] Для критерия Гурвица принимать во всех вариантах $\lambda = 0{,}7$.

– 7, 3 и 4 усл. ед. В каком режиме должна работать технологическая линия, чтобы доход от выпущенной продукции был возможно большим, если предприятие выпускает 120 единиц продукции?

Известно, что вероятность того, что сырье будет без примесей, равна 0,1, а вероятность появления сырья с малым количеством примесей равна 0,2.

Ответ: технологическая линия должна работать во втором режиме.

Вариант 3. Небольшая фирма производит молочную продукцию. Один из ее продуктов – творожная масса. Необходимо решить, какое количество творожной массы следует производить в течение месяца, если вероятность того, что спрос составит 100, 150 или 200 кг равна соответственно 0,2; 0,5; 0,3. Затраты на производство 1 кг творожной массы равны 1 тыс. усл. ед. Фирма продает массу по цене 1,5 тыс. усл. ед. за 1 кг. Если масса не продается в течение месяца, то она снимается с реализации и фирма не получает дохода.

Дать рекомендации, сколько творожной массы следует производить фирме.

Ответ: производить 150 кг творожной массы.

Вариант 4. За некоторый промежуток времени потребление мазута на теплоэлектроцентрали в зависимости от его качества составляет 7, 8 или 9 единиц. Стоимость мазута при заготовке – 3 усл. ед. Если для обеспечения заданной температуры теплоносителя в течение всего рассматриваемого промежутка времени заготовленного мазута окажется недостаточно, то придется закупить недостающее количество мазута, что потребует затрат в размере 4 усл. ед. на единицу массы мазута. Если же запас топлива превысит потребность, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 2 усл. ед. за единицу массы мазута. Составить платежную матрицу и дать рекомендации по выбору оптимальной стратегии, используя различные критерии.

Ответ: закупить 7 единиц мазута.

Вариант 5. Магазин может закупить для реализации 10, 15 или 20 единиц скоропортящегося товара по цене 3 усл. ед. за единицу товара. В зависимости от уровня спроса (пониженный, умеренный или повышенный) в день реализации может быть продано 10, 15 или 20 единиц товара по цене 5 усл. ед. за единицу. Предполагается, что остаток товара будет реализован на следующий день по сниженной цене 2 усл. ед. за единицу товара. Используя игровой подход, составить платежную матрицу и высказать рекомендации по выбору оптимальной стратегии, используя различные критерии.

Ответ: закупить 10 единиц товара.

Вариант 6. Для отопления коттеджа в зимний период используется уголь, цена на который зависит от времени года и характера зимы. Летом тонна угля стоит 6 усл. ед., в мягкую зиму – 6,5 усл. ед., в обычную – 7 усл. ед., а в холодную – 7,5 усл. ед. Расход угля в отопительный сезон полностью определяется характером зимы: на мягкую зиму достаточно 6 т, на обычную – 7 т, а в холодную расходуется 8 т. Понятно, что затраты домовладельца зависят от количества угля, запасенного им летом.

При анализе возможных вариантов уровня запаса следует иметь в виду, что при необходимости недостающее количество угля можно приобрести зимой. Кроме того, надо учесть, что хранение остатка неиспользованного угля обходится домовладельцу в 1 усл. ед. за 1 т.

Вероятности того, что зима будет мягкой, средней или холодной равны соответственно 0,2; 0,5 и 0,3.

Составить платежную матрицу и дать рекомендации по выбору оптимальной стратегии.

Ответ: закупить летом 6 т угля.

Вариант 7. Для обеспечения однократной зимовки небольшой экспедиции требуется доставить к месту зимовки вместе с другими грузами запас топлива. В случае нормальной зимы достаточно 16 т, но при мягкой или суровой зиме эти цифры составляют 11 и 20 т. Если запасаться топливом летом, то оно будет стоить 12 усл. ед. за 1 т. Если придется доставлять топливо зимой дополнительно, то это обойдется в нормальную и суровую зиму соответственно на 1 и 4 усл. ед. за 1 т дороже, чем летом. Обратная транспортировка неизрасходованного топлива по окончании зимовки обходится в 1 усл. ед. за 1 т, а его стоимость не возмещается.

Определить, какова оптимальная стратегия руководителя экспедиции, если данные метеорологов показывают, что в данной местности вероятности мягкой, нормальной и суровой зимы одинаковы.

Ответ: доставить летом к месту зимовки 11 т топлива.

Вариант 8. За некоторый период времени потребление исходного сырья на предприятии в зависимости от его качества составляет 10, 11 или 12 единиц. Если для выпуска запланированного объема основной продукции исходного сырья окажется недостаточно, запас его можно пополнить, что потребует дополнительных затрат в размере 5 усл. ед. на единицу сырья. Если же запас сырья превысит потребности, то дополнительные затраты на содержание и хранение остатка составят 2 усл. ед. на единицу сырья. Составить платежную матрицу и дать рекомендации по выбору оптимальной стратегии, используя различные критерии. Стоимость исходного сырья – 3 усл. ед. за единицу сырья.

Ответ: закупить 10 единиц сырья.

Контрольные вопросы

1. Что такое игра с природой и в чем ее особенности?
2. Что такое риск в теории матричных игр? Как рассчитывается матрица рисков?
3. Какие критерии применяются в случае, когда известны вероятности состояний природы?
4. Какие критерии используются в условиях полной неопределенности?
5. В чем суть и условия применения критериев Байеса и Лапласа?
6. Критерии Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

2. МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Лабораторная работа 3. Простейшие методы прогнозирования

3.1. Основные теоретические сведения

3.1.1. Постановка задачи прогнозирования

Модели прогнозирования рассматривают экономические процессы, протекающие во времени. Поведение такого процесса характеризуется значением некоторого экономического показателя. Предполагается, что этот показатель формируется под воздействием большого количества как случайных, так и неслучайных факторов, выделить которые либо невозможно, либо по которым отсутствует информация. Поэтому ход изменения данного показателя связывают не с факторами, а с течением времени.

Исходными данными для задач прогнозирования являются значения экономического показателя, измеренные обычно через равные промежутки времени в прошлом. Таким образом, в задачах прогнозирования даны:

$t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n$ – моменты времени, относящиеся к прошлому (например, номера недель);

$y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n$ – значение экономического показателя, измеренное в эти моменты времени (например, число продаж некоторого товара или температура воздуха). Такой набор значений называется ***временным рядом***.

Основная цель моделей прогнозирования состоит в том, чтобы сделать прогноз о развитии изучаемого процесса, т. е. предсказать значение данного экономического показателя в момент времени, относящийся к будущему. Например, требуется найти y_{n+1} и y_{n+2}.

3.1.2. Простейшие методы прогнозирования

Простейшими методами прогнозирования являются методы *сглаживания.* Суть этих методов состоит в замене фактических значений показателя расчетными, имеющими меньшую колеблемость, чем исходные данные. Методы сглаживания применяются для двух основных целей:

1. Подготовки временного ряда к выявлению тренда и последующему использованию трендовых моделей прогнозирования.

2. Краткосрочного прогнозирования.

Методы сглаживания позволяют уменьшить влияние случайных факторов на экономический показатель и, таким образом, выявить основную тенденцию его развития (тренд).

Рассмотрим два метода сглаживания: метод скользящих средних и метод экспоненциального сглаживания.

Метод скользящих средних. Сглаженное значение ряда в момент времени t рассчитывается по формуле

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-m+1} + y_{t-m+2} + \ldots + y_t}{m}, \qquad (2.1)$$

где m – интервал сглаживания.

Например, при $m = 3$ сглаженное значение ряда будет равно:

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-2} + y_{t-1} + y_t}{3}.$$

При этом первые m–1 значений сглаженного ряда не рассчитываются. Возможны и другие варианты формулы сглаживания.

Например, при $m = 3$ возможна формула

$$\bar{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3}.$$

В этом случае не рассчитываются первое и последнее значение ряда. Однако надстройка *Пакет анализа* MS Excel ориентирована именно на формулу (2.1).

Чаще всего сглаживание проводят по 3, 5 или 7 членам исходного ряда. Чем больше интервал сглаживания, тем сильнее усреднение данных и менее заметны детали в поведении экономического показателя. Интервал сглаживания выбирается в зависимости от того, насколько важны старые значения исследуемого показателя по сравнению с новыми. Чем больше интервал сглаживания m, тем больший вес имеют старые значения.

Метод экспоненциального сглаживания. Этот метод позволяет при расчете очередного сглаженного значения учесть всю "предисторию" развития данного показателя. При этом учитывается степень старения данных: чем старее информация, тем с меньшим весом входит она в формулу для расчета сглаженного значения уровня ряда (Q_t). Экспоненциальная средняя рассчитывается по формуле

$$Q_t = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha) \cdot Q_{t-1}, \qquad (2.2)$$

где Q_t – экспоненциальная средняя в момент времени t, которая заменяет наблюдавшееся значение y_t;

Q_{t-1} – предыдущее значение экспоненциальной средней;

α – параметр сглаживания, характеризующий вес текущего (самого нового) наблюдения ($0 \le \alpha \le 1$).

Если $\alpha = 1$, то предыдущие наблюдения полностью игнорируются; если $\alpha = 0$, то игнорируется текущее наблюдение. Обычно используется α в диапазоне от 0,1 до 0,3. При выборе α необходимо учитывать, что для повышения скорости реакции на изменение процесса развития нужно повысить значение α (тем самым увеличивается вес текущих наблюдений), однако при этом уменьшаются "фильтрационные" возможности экспоненциальной средней.

3.2. Примеры решения задач

Задача 1. Известны значения уровня безработицы в США за 1992–1999 гг. (табл. 2.1).

Таблица 2.1. **Уровень безработицы в США за 1992–1999 гг., %**

Годы							
1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
7,4	6,8	6,1	5,6	5,4	4,9	4,5	4,2

Используя метод скользящих средних, выполните выравнивание этого временного ряда. Используйте интервал сглаживания, равный: а) 5 лет, б) 3 года. Укажите, в каком из этих случаев Вы придаете наибольший вес старым данным. Постройте график фактических и прогнозных значений уровня безработицы на период 1992–1999 гг. Прогнозирование выполните тремя способами:

- самостоятельно задавая формулу сглаживания;
- используя надстройку *Пакет анализа*;
- используя команду *Добавить линию тренда*.

Порядок выполнения работы

1. Ввод исходных данных задачи. Введем в ячейки A3:A10 годы, по которым имеются фактические данные, а в ячейки B3:B10 введем соответствующие значения уровня безработицы (рис. 2.1).

	A	B	C	D	E	F
1	год	Уровень безработицы	Среднее по формуле		Среднее пакет анализа	
2			m=3	m=5	m=3	m=5
3	1992	7,4			#Н/Д	#Н/Д
4	1993	6,8			#Н/Д	#Н/Д
5	1994	6,1	6,766667		6,766667	#Н/Д
6	1995	5,6	6,166667		6,166667	#Н/Д
7	1996	5,4	5,7	6,26	5,7	6,26
8	1997	4,9	5,3	5,76	5,3	5,76
9	1998	4,5	4,933333	5,3	4,933333	5,3
10	1999	4,2	4,533333	4,92	4,533333	4,92

Рис. 2.1. **Расчеты методом скользящих средних**

2. Расчет скользящего среднего по формуле. Отведем столбцы C и D для расчетов скользящего среднего по формуле (2.1) при интервале сглаживания m = 3 и m = 5 соответственно. В ячейку C5 введем формулу вычисления среднего значения соответствующего и двух предшествующих уровней ряда:

=СРЗНАЧ(B3:B5).

Скопируем эту формулу в ячейки C6:C10 с помощью автозаполнения.

Аналогично в ячейку D7 введем формулу расчета среднего из пяти уровней ряда:

=СРЗНАЧ(B3:B7).

Скопируем эту формулу вниз по столбцу D.

Результаты расчетов по формулам показаны на рис. 2.1.

3. Использование надстройки *Пакет анализа* для сглаживания методом скользящих средних. В меню *Сервис* должен быть пункт *Анализ данных…* . Если этого пункта нет, это означает, что надстройка *Пакет анализа* не загружена. Для подключения надстройки *Пакет анализа* выполним команду *Сервис / Надстройки…* . В открывшемся окне диалога установим флажок в строке *Пакет анализа*.

Вызов пакета анализа осуществляется командой *Сервис / Анализ данных…* . В окне *Анализ данных* следует выбрать инструмент анализа *Скользящее среднее*. Появляется окно *Скользящее среднее*, которое заполним, как показано на рис. 2.2.

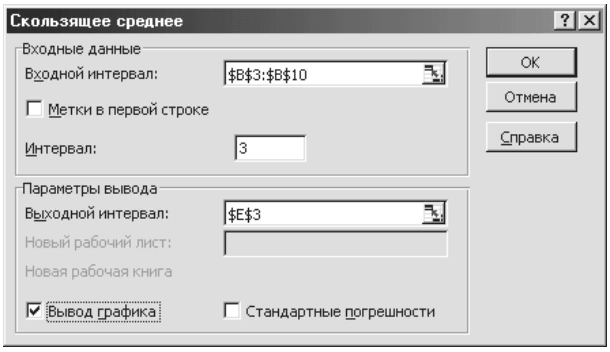

Рис. 2.2. **Окно *Скользящее среднее* для интервала сглаживания *m* = 3**

- Поле *Входной интервал* задает ряд наблюдаемых (фактических) значений показателя y_i (диапазон B3:B10).
- Поле *Интервал* показывает количество данных, включаемых в подсчет средней величины ($m = 3$).
- Поле *Выходной интервал* задает адрес ячейки, с которой начнется вывод результата. Поскольку для интервала сглаживания $m = 3$ мы хотим получить результат в столбце E, начальной ячейкой для вывода результата будет E3.
- Флажок *Вывод графика* указывает на необходимость графического представления результатов сглаживания.

После заполнения окна *Скользящее среднее* и нажатия кнопки *OK* ячейки E3:E10 будут заполнены результатами расчетов среднего с интервалом сглаживания $m = 3$. Как мы видим на рис. 2.1, эти результаты полностью совпадают с рассчитанными с помощью функции СРЗНАЧ() в столбце С. Более того, если посмотреть содержимое ячеек E5:E10, то видно, что пакет анализа занес в эти ячейки ту же функцию СРЗНАЧ(). Первые два значения сглаженного ряда пакет анализа не рассчитывает и помещает в ячейки E3 и E4 сокращение #Н/Д (нет данных). Кроме этого, пакет анализа строит график фактических и сглаженных значений (рис. 2.3).

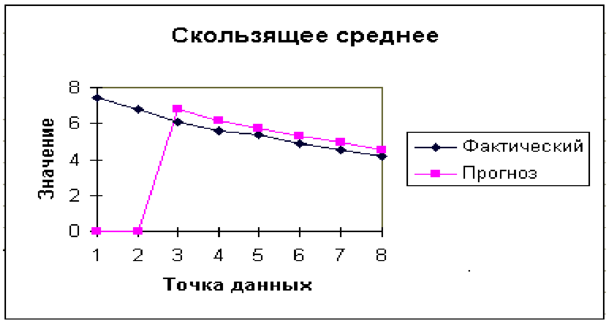

Рис. 2.3. **График скользящего среднего, построенный пакетом анализа**

Этот график не очень удачен в том смысле, что первые значения сглаженного ряда, которые не рассчитываются, показаны как нулевые значения. Поэтому удалим этот график, и в дальнейшем не будем устанавливать флажок *Вывод графика* в окне *Скользящее среднее*.

Аналогично выполним сглаживание с интервалом $m = 5$ и представим результаты в столбце F.

4. Использование команды *Добавить линию тренда* для построения графика скользящей средней. Построим график фактических значений уровня безработицы в США по данным в ячейках A3:B10 (используйте тип диаграммы *Точечная*, причем точки соединяются отрезками прямых).

Выполним один щелчок по диаграмме для того, чтобы перейти в режим ее редактирования. Затем подведем курсор к какой-либо точке на графике и снова щелкнем левой кнопкой мыши. Ряд данных на графике выделяется желтым цветом. Затем нужно нажать правую кнопку мыши для вызова контекстного меню (перемещать курсор мыши после выделения ряда нельзя!). В контекстном меню выберем команду *Добавить линию тренда* (рис. 2.4). На экране появляется окно *Линия тренда* (рис. 2.5).

Рис. 2.4. **Контекстное меню для выделенного ряда данных**

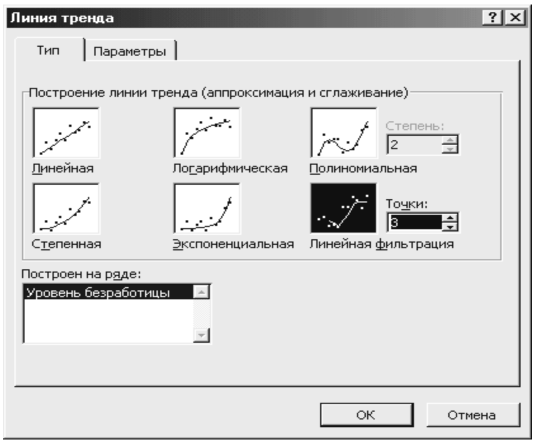

Рис. 2.5. **Окно *Линия тренда* для метода скользящих средних**

В окне *Линия тренда* нужно выбрать метод прогнозирования *Линейная фильтрация* и задать с помощью счетчика *Точки* интервал сглаживания ($m = 3$). Аналогично добавляется на график линейный фильтр для интервала $m = 5$. Следует отметить, что график скользящей средней называется здесь линейным фильтром по той причине, что метод скользящих средних дает лучшие результаты для рядов, имеющих в своей основе линейную тенденцию.

Итоговый вид графика, который нужно получить в этой работе, показан на рис. 2.6. Для наглядности можно изменить цвет каждого линейного фильтра. Для этого следует выделить его щелчком левой кнопки мыши, а затем вызвать контекстное меню и выбрать из него команду *Формат линии тренда*. Далее на вкладке *Вид* можно задать цвет линии.

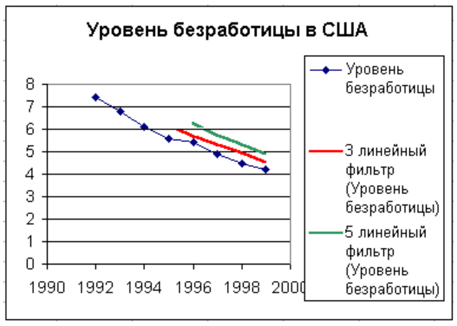

Рис. 2.6. **График фактических значений уровня безработицы и скользящей средней для двух интервалов сглаживания**

Указанные графики позволяют сделать вывод, что сглаженный ряд при большем интервале сглаживания ($m = 5$) находится дальше от фактических значений, чем ряд с интервалом $m = 3$. Это происходит в результате влияния старых данных об уровне безработицы (за 1992–1995 гг.). Поскольку, чем больше интервал сглаживания, тем большее влияние имеют старые данные, высокий уровень безработицы в эти годы обуславливает повышение среднего значения за 1996 г. Таким образом, для данного ряда более целесообразно выбрать интервал сглаживания $m = 3$, при котором результирующая кривая является достаточно гладкой и, в то же время, более близкой к фактическим данным.

Задача 2. В 1997 г. наблюдались следующие значения курса немецкой марки (период наблюдений – 19 недель) (табл. 2.2).

Таблица 2.2. **Значения курса немецкой марки, усл. ед.**

Неделя									
1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я
3333	3337	3354	3364	3418	3392	3380	3406	3394	3409

Окончание табл. 2.2

Неделя								
11-я	12-я	13-я	14-я	15-я	16-я	17-я	18-я	19-я
3410	3425	3409	3415	3416	3402	3387	3391	3390

Используя метод экспоненциального сглаживания (α = 0,2), выполните выравнивание этого ряда двумя способами:

1) самостоятельно задавая формулу сглаживания;
2) используя надстройку *Пакет анализа*.

Постройте график фактических и прогнозных значений курса немецкой марки. Изменяя параметр сглаживания α, наблюдайте изменение графика прогнозных значений. На основании этих наблюдений сделайте вывод о том, какая величина α является наиболее подходящей в данном случае.

Порядок выполнения работы

1. Ввод исходных данных задачи. Введем в ячейки A3:A21 номера недель, а в ячейки B3:B21 – соответствующие значения курса немецкой марки (рис. 2.7).

	A	B	C	D
1	Номер недели	Курс марки	Экспоненц. сглаживание по формуле	Экспоненц. сглаживание пакет анализа
2			0,2	a=0,2
3	1	3333	3333,00	#Н/Д
4	2	3337	3333,80	3333,00
5	3	3354	3337,84	3333,80
6	4	3364	3343,07	3337,84
7	5	3418	3358,06	3343,07
8	6	3392	3364,85	3358,06
9	7	3380	3367,88	3364,85
10	8	3406	3375,50	3367,88
11	9	3394	3379,20	3375,50
12	10	3409	3385,16	3379,20
13	11	3410	3390,13	3385,16
14	12	3425	3397,10	3390,13
15	13	3409	3399,48	3397,10
16	14	3415	3402,59	3399,48
17	15	3416	3405,27	3402,59
18	16	3402	3404,61	3405,27
19	17	3387	3401,09	3404,61
20	18	3391	3399,07	3401,09
21	19	3390	3397,258877	3399,073596

Рис. 2.7. **Расчеты методом экспоненциального сглаживания**

2. Расчет методом экспоненциального сглаживания по формуле. В ячейку C2 введем значение заданного параметра сглаживания α, равное 0,2. На эту ячейку мы будем делать ссылки в формулах, затем будем изменять ее, исследуя влияние параметра сглаживания.

В ячейку C3 введем следующую формулу: =B3 (первый элемент сглаженного ряда принимается равным фактическому значению показателя). В ячейку C4 введем формулу расчета экспоненциального среднего, аналогичную формуле (2.2): =$C$2*B4+(1–$C$2)*C3.

Адрес ячейки C2 является абсолютным для того, чтобы эту формулу можно было потом правильно скопировать. Ссылка на ячейку B4 – это ссылка на соответствующее фактическое значение уровня ряда, а ссылка на ячейку C3 – на предыдущее экспоненциальное среднее.

Скопируем эту формулу вниз по столбцу C, используя автозаполнение. Результат расчетов см. на рис. 2.7.

3. Расчет экспоненциальной средней с помощью *Пакета анализа*. Вызовем надстройку *Пакет анализа* командой *Сервис* / *Анализ данных*… и выберем инструмент анализа *Экспоненциальное сглаживание*. Открывается окно *Экспоненциальное сглаживание*, которое нужно заполнить, как показано на рис. 2.8.

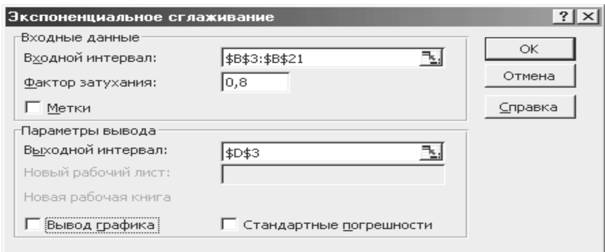

Рис. 2.8. **Окно *Экспоненциальное сглаживание***

Поля в этом окне *Экспоненциальное сглаживание* имеют следующее значение:

- поле *Входной интервал* задает ряд фактических значений исследуемого показателя (B3:B21);
- поле *Фактор затухания* определяется параметром сглаживания и равно (1 – α);
- поле *Выходной интервал* содержит адрес ячейки, с которой начинается вывод результата (D3);
- флажок *Вывод графика* задает вывод графиков фактического и сглаженного ряда. Однако для случая расположения исходных данных по столбцам *Пакет анализа* строит график некорректно, поэтому этот флажок устанавливать не следует.

Результаты расчетов, которые дает *Пакет анализа*, представлены на рис. 2.7. в столбце D. *Пакет анализа* дает сглаженное значение со сдвигом на одну ячейку. Если изучить формулы, которые записывает *Пакет анализа* в ячейки столбца D, то становится очевидным, что расчет выполняется по несколько другой формуле, чем (2.2):

$$Q_t = \alpha \cdot y_{t-1} + (1-\alpha) \cdot Q_{t-1}.$$

4. Анализ влияния параметра сглаживания α. Построим графики фактического и сглаженного ряда по данным в столбцах B и C, как показано на рис. 2.9 (используйте тип диаграммы *точечная*, на которой значения соединены отрезками).

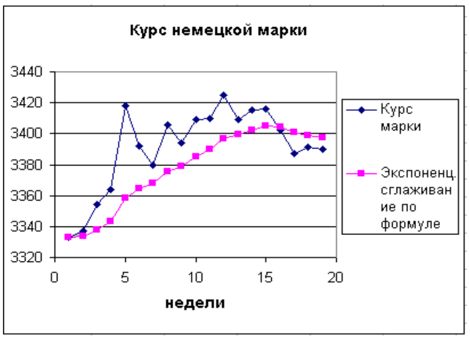

Рис. 2.9. **Графики фактического и сглаженного ряда для α = 0,2**

Затем будем изменять значение параметра α в ячейке C2 и наблюдать изменение графика сглаженного ряда (задавайте α = 0,3; α = 0,4 и т. д.). Исходя из этих наблюдений, можно сделать вывод, что с увеличением параметра α сглаженный ряд приближается к фактическим данным, но его график при этом становится менее гладким. Это объясняется тем, что α – это вес последнего (самого нового) наблюдения в формуле сглаживания.

3.3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. По данным табл. 2.3 о количестве задержанных рейсов крупнейшей авиакомпанией США “Delta AirLines” в период с января по декабрь 2000 г. выполнить выравнивание с использованием следующих методов:

1) скользящих средних (интервал $m = 3$);
2) экспоненциального сглаживания (α = 0,2).

Построить графики фактических и прогнозных значений. Исследовать, какое из значений α наиболее соответствует экономическому процессу, заданному временным рядом.

Таблица 2.3. **Количество задержанных рейсов, %**

Месяц					
январь	февраль	март	апрель	май	июнь
26,78 %	20,75 %	20,9 %	20,55 %	19,33 %	26,27 %

Окончание табл. 2.3

Месяц					
июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь
23,86%	22,69%	21,85%	17,95%	32,56%	43,91%

Вариант 2. Курс евро по отношению к белорусскому рублю в январе – феврале 2002 г. представлен в табл. 2.4. По этим данным выполнить выравнивание с использованием следующих методов:

1) скользящих средних (интервал $m = 3$);
2) экспоненциального сглаживания (α = 0,3).

Построить графики фактических и прогнозных значений. Исследовать, какое из значений α наиболее соответствует экономическому процессу, заданному временным рядом.

Таблица 2.4. **Курс евро по отношению к бел. р.**

Дата					
05.01.2002 г.	10.01.2002 г.	15.01.2002 г.	20.01.2002 г.	25.01.2002 г.	30.01.2002 г.
1427,18	1431,07	1438,62	1428,82	1429,48	1410,43

Дата					
04.02.2002 г.	09.02.2002 г.	14.02.2002 г.	19.02.2002 г.	24.02.2002 г.	01.03.2002 г.
1418,32	1444,64	1447,86	1445,61	1448,13	1442,55

Вариант 3. Данные о розничном товарообороте Республики Беларусь по годам приведены в табл. 2.5 (сопоставимые цены в процентах к предыдущему году). Выполнить выравнивание этого ряда с помощью следующих методов:

1) скользящих средних (интервал $m = 3$);
2) экспоненциального сглаживания ($\alpha = 0{,}4$).

Построить графики фактических и прогнозных значений. Исследовать, какое из значений α наиболее соответствует экономическому процессу, заданному временным рядом.

Таблица 2.5. **Розничный товарооборот Республики Беларусь, %**

Год											
1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
114,7	91,9	78,0	85,8	82,0	76,0	122,0	116,9	122,0	113,5	105,4	116,4

Вариант 4. По данным табл. 2.6 о вводе в действие жилых домов в Республике Беларусь (общая площадь, тыс. м^2) выполнить выравнивание с помощью следующих методов:

1) скользящих средних (интервал $m = 3$);
2) экспоненциального сглаживания ($\alpha = 0{,}3$).

Построить графики фактических и прогнозных значений. Исследовать, какое из значений α наиболее соответствует экономическому процессу, заданному временным рядом.

Таблица 2.6. **Общая площадь введенных в действие жилых домов, тыс. м^2**

Год											
1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
5282	5392	4444	3823	3403	1949	2627	3360	3635	2917	3528	3009

Вариант 5. Имеются данные о продаже мяса и мясопродуктов в Республике Беларусь (табл. 2.7). Выполнить выравнивание этого временного ряда, используя следующие методы:

1) скользящих средних (интервал $m = 3$);
2) экспоненциального сглаживания ($\alpha = 0{,}4$).

Построить графики фактических и прогнозных значений. Исследовать, какое из значений α наиболее соответствует экономическому процессу, заданному временным рядом.

Таблица 2.7. **Данные о продаже мяса и мясопродуктов, тыс. т**

Год						
1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
443	480	483	570	543	532	538

Вариант 6. В табл. 2.8 приведены данные о продаже картофеля на городских рынках Республики Беларусь. Выполнить выравнивание этого временного ряда используя:

1) метод скользящих средних (интервал $m = 3$);
2) метод экспоненциального сглаживания ($\alpha = 0{,}3$).

Построить графики фактических и прогнозных значений. Исследовать, какое из значений α наиболее соответствует экономическому процессу, заданному временным рядом.

Таблица 2.8. **Данные о продаже картофеля, т**

Год						
1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
9954	8892	9114	9001	10073	11264	10626

Вариант 7. В табл. 2.9 приведены курсы евро и доллара США по отношению к белорусскому рублю весной 2002 г. Рассчитать отношение евро к доллару США и выполнить выравнивание полученного временного ряда с помощью:

1) метода скользящих средних (интервал $m = 5$);
2) метода экспоненциального сглаживания ($\alpha = 0{,}3$).

Построить графики фактических и прогнозных значений. Исследовать, какое из значений α наиболее соответствует экономическому процессу, заданному временным рядом.

Таблица 2.9. **Отношение евро к доллару США**

Дата	Евро	Доллар США	Дата	Евро	Доллар США
05.02.02 г.	1418,32	1645	09.04.02 г.	1511,93	1723
12.02.02 г.	1442,41	1653	16.04.02 г.	1521,83	1727
19.02.02 г.	1445,61	1656	23.04.02 г.	1543,11	1735
26.02.02 г.	1456,63	1665	30.04.02 г.	1570,07	1737
05.03.02 г.	1446,14	1673	07.05.02 г.	1591,32	1740
12.03.02 г.	1472,43	1675	14.05.02 г.	1594,80	1742
19.03.02 г.	1486,35	1690	21.05.02 г.	1610,70	1750
26.03.02 г.	1488,66	1696	28.05.02 г.	1619,72	1762
02.04.02 г.	1495,59	1711	04.06.02 г.	1651,06	1772

Вариант 8. В табл. 2.10 приведены годовые данные о трудоемкости производства цемента. Выполнить сглаживание ряда, используя:

1) метод скользящих средних (интервал m = 3);

2) метод экспоненциального сглаживания (α = 0,3).

Построить графики фактических и прогнозных значений. Исследовать, какое из значений α наиболее соответствует экономическому процессу, заданному временным рядом.

Таблица 2.10. **Трудоемкость производства 1 т цемента, нормо-смен**

Текущий номер года	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Трудоемкость 1 т цемента	7,9	8,3	7,5	6,9	7,2	5,6	5,8	4,9	5,1	4,4

Контрольные вопросы

1. Что такое временной ряд? Приведите примеры.
2. В чем суть задачи прогнозирования (что дано и что нужно найти)?
3. Какие методы прогнозирования называются методами сглаживания и каковы цели их применения?
4. Как рассчитываются сглаженные значения ряда в методе скользящих средних?
5. Что такое интервал сглаживания в методе скользящих средних и какую он играет роль?
6. Как рассчитывается сглаженное значение ряда в методе экспоненциального сглаживания?
7. В чем особенность и преимущество метода экспоненциального сглаживания?
8. Как выбирается параметр сглаживания в методе экспоненциального сглаживания?

Лабораторная работа 4. Графический способ подбора уравнения тренда

4.1. Основные теоретические сведения

Трендом (***тенденцией***) называется неслучайная, медленно меняющаяся составляющая временного ряда, на которую накладываются случайные колебания или сезонные эффекты. Тренд описывает основную закономерность развития показателя и определяется влиянием нескольких основных факторов. Например, если спрос на какой-либо товар со временем растет, то это объясняется ростом благосостояния населения, улучшением качества товара, действием рекламы и т. д.

Все вместе эти факторы дают тенденцию роста спроса на товар. Однако существуют и случайные колебания спроса в результате появления конкурента, проблем с организацией торговли и т. п. На поведение экономического показателя могут оказывать влияние также и сезонные эффекты (например, увеличение спроса на детские игрушки ежегодно в декабре).

Трендовые модели прогнозирования основываются на ***методе экстраполяции***, т. е. методе продления на будущее тенденции, наблюдавшейся в прошлом. Для корректного применения метода экстраполяции требуется соблюдение двух условий:

1) Временной ряд экономического показателя должен действительно иметь тренд, т. е. преобладающую тенденцию.

2) Общие условия, определявшие развитие показателя в прошлом, останутся без существенных изменений и в будущем.

Следовательно, чтобы использовать метод экстраполяции в нашем примере, мы должны быть уверены, что действие вышеприведенных факторов в будущем не прекратится.

С математической точки зрения, ***тренд*** – это некоторая функция от времени, приближенно описывающая поведение исследуемого показателя. На плоскости функция тренда задает кривую, называемую ***кривой роста***.

Наиболее часто в экономике используются полиномиальные, экспоненциальные и S-образные кривые роста. Приведем примеры кривых роста.

- Полиномиальные:

$\widetilde{y}_t = a_1 t + a_0$ – линейная;

$\widetilde{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ – полином второй степени;

$\widetilde{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ – полином третьей степени.

- Экспоненциальные:

$\widetilde{y}_t = a \cdot b^t$ – простая экспонента;

$\widetilde{y}_t = k + a \cdot b^t$ – модифицированная экспонента ($a > 0$, $0 < b < 1$).

- S-образные:

$\widetilde{y}_t = k \cdot a^{b^t}$ – кривая Гомперца ($a > 0$, $0 < b < 1$);

$\widetilde{y}_t = \dfrac{k}{1 + a \cdot e^{-bt}}$ – логистическая кривая ($a > 0$, $b > 0$),

где a_1, a_0, a, b и т. д. – параметры тренда, которые подбираются таким образом, чтобы тренд прошел как можно ближе к фактическим данным.

Метод наименьших квадратов предназначен для определения параметров тренда. Этот метод состоит в том, что параметры тренда подбираются таким образом, чтобы сумма квадратов разностей теоретических и расчетных значений была минимальной, т. е.:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \widetilde{y}_i)^2 \to \min, \qquad (2.3)$$

где y_i – фактическое значение показателя;

$\widetilde{y}_i$ – теоретическое (расчетное) значение показателя;

$\varepsilon_i = y_i - \widetilde{y}_i$ – отклонение, определяемое случайными факторами (рис. 2.10).

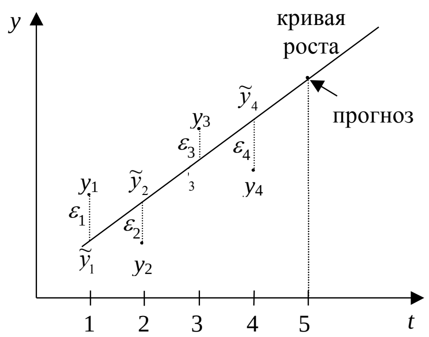

Рис. 2.10. **Линейная кривая роста**

Например, для линейного тренда находят a_1 и a_0 из условия

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_1 \cdot t - a_0)^2 \to \min.$$

Для любого временного ряда обычно подбирают несколько трендовых моделей, (например, линейную и экспоненциальную) и для каждой модели находят параметры уравнения тренда. Затем нужно сравнить модели и определить, которая из них точнее соответствует фактическим данным. Точность оценивается как совокупная разница между фактическими значениями показателя и его соответствующими теоретическими значениями. Обычно в качестве показателя точности модели используют ***коэффициент детерминации*** (R^2):

$$R^2 = 1 - \varphi^2, \qquad (2.4)$$

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \widetilde{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}, \qquad (2.5)$$

где n – количество уровней временного ряда (число наблюдений);

y_t – фактическое значение показателя;

$\widetilde{y}_t$ – расчетное значение показателя на основании тренда;

$\bar{y}$ – среднее арифметическое фактических значений $\left(\bar{y} = \sum_{t=1}^{n} y_t / n\right)$.

Коэффициент детерминации всегда удовлетворяет условию:

$$0 \le R^2 \le 1\,.$$

Чем ближе R^2 к единице, тем точнее модель. На практике стараются подобрать такую модель, чтобы $R^2 > 0{,}9$.

Когда выбрана лучшая модель и известны ее параметры, прогноз выполняется путем подстановки в уравнение тренда значения времени, относящегося к будущему.

В составе пакета MS Excel имеется средство добавления кривой роста выбранного вида на график фактических значений показателя. Чтобы использовать это средство, необходимо построить диаграмму изменения фактических значений показателя, затем выделить на ней ряд данных и из контекстного меню выбрать команду *Добавить линию тренда...* . Эта команда дает возможность добавления только некоторых (стандартных) функций тренда: линейной, экспоненциальной, полиномиальной, логарифмической и степенной. Для выбранной функции параметры тренда рассчитываются методом наименьших квадратов, т. е. Excel автоматически производит оптимизацию функции (2.3).

4.2. Пример решения задачи

В табл. 2.11 отражены данные об объемах продаж некоторой фирмы. С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на 3 недели вперед.

Таблица 2.11. **Данные об объеме продаж**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я
Количество проданных единиц	17	22	26	27	35	40	41	45	50	63	78

Порядок выполнения работы

1. Ввод исходных данных задачи. В ячейки A1 и B1 введем заголовки исходных данных, в ячейки A2:A12 – номера недель, а в ячейки B2:B12 – соответствующее количество продаж (фактические данные) (рис. 2.11).

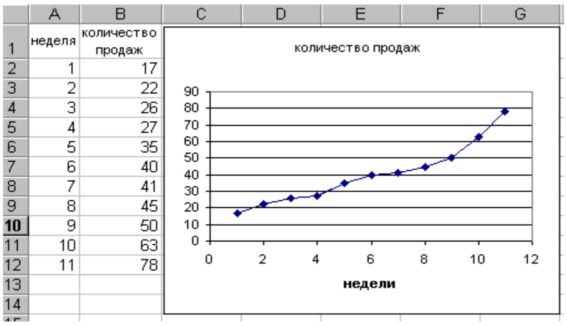

Рис. 2.11. **Исходные данные и график фактических значений показателя**

2. Построение графика фактических значений показателя. Выделим ячейки B1:B12 (исходные данные вместе с заголовком) и вызовем мастер диаграмм, нажав кнопку на панели инструментов. Построим с его помощью диаграмму типа *График*, как показано на рис. 2.11.

3. Изображение на графике кривой роста линейной модели. Выполним один щелчок по диаграмме для того, чтобы перейти в режим ее редактирования. Затем подведем курсор к какой-либо точке на графике и снова щелкнем левой кнопкой мыши. Ряд данных на графике выделяется желтым цветом. Затем нужно нажать правую кнопку мыши для вызова контекстного меню (перемещать курсор мыши после выделения ряда нельзя!). В контекстном меню выберем команду *Добавить линию тренда* (рис. 2.12).

На экране появляется окно *Линия тренда* (рис. 2.13).

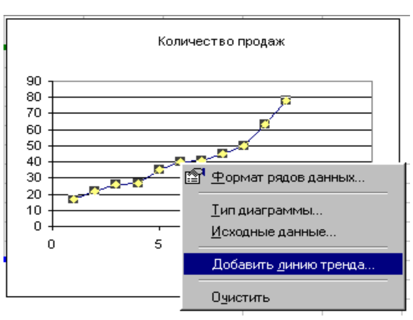

Рис. 2.12. **Контекстное меню для выделенного ряда данных**

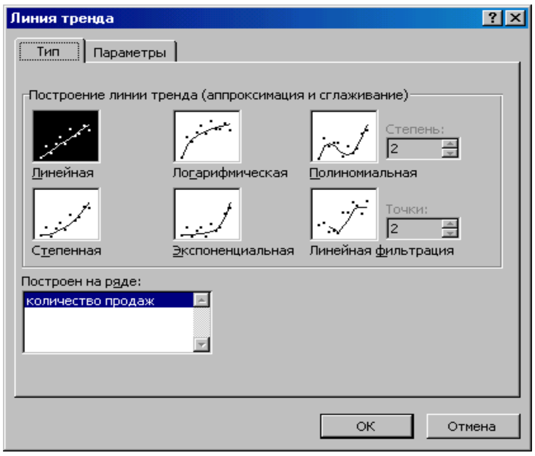

Рис.2.13. **Вкладка *Тип* окна *Линия тренда***

В окне *Линия тренда* на вкладке *Тип* выберем *Линейная* (см. рис. 2.13), а на вкладке *Параметры* нужно установить следующие флажки:

- показывать уравнение на диаграмме;
- поместить на диаграмму величину достоверности аппроксимации (R^2).

После нажатия кнопки *ОК* на графике наряду с фактическими значениями количества продаж будет показана линейная функция тренда и ее уравнение. Уравнение и коэффициент детерминации можно выделить щелчком левой кнопки мыши и перетащить на то место графика, где их лучше видно (рис. 2.14).

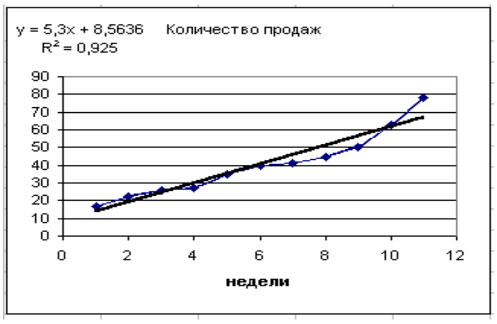

Рис. 2.14. **Линейная кривая роста и ее уравнение**

4. Подбор функции тренда, наиболее точно описывающей исходные данные. Аналогично следует попробовать другие типы линий тренда. При добавлении каждой новой линии тренда на график нужно сравнить ее коэффициент детерминации с аналогичным показателем предыдущей модели. Ту линию тренда, у которой коэффициент детерминации окажется меньше, лучше сразу удалять с графика. Для этого нужно выделить ее щелчком левой кнопки мыши и нажать клавишу *Delete*. В работе следует рассматривать полином только второй степени. В результате перебора всех возможных (стандартных) линий тренда в данной задаче выбор останавливается на экспоненциальной модели, поскольку для нее коэффициент детерминации наибольший (рис. 2.15).

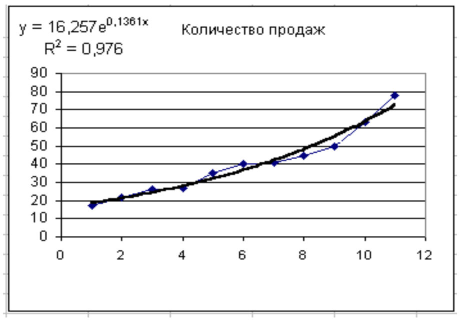

Рис. 2.15. **Экспоненциальная линия тренда, наиболее точно описывающая исходные данные задачи**

5. Выполнение прогноза. Поскольку нужно выполнить прогноз на 3 недели вперед, допишем номера этих недель (12, 13 и 14) в столбец А. В соответствующие ячейки в столбце В следует занести формулы вычисления теоретического значения по функции тренда. При этом можно записывать сразу числовые значения параметров. Обратите внимание, что уравнение экспоненциальной кривой, полученное на графике, имеет вид

$$Y = a \cdot e^{bt}.$$

Поэтому для его задания необходимо использовать функцию EXP(), т. е. в ячейку B13 нужно записать формулу

=16,257*EXP(0,1361*A13).

Затем эту формулу можно скопировать в ячейки B14 и B15 с помощью автозаполнения. В результате получим в ячейках B13:B15 следующие прогнозы:

- на 12-ю неделю – 83 продажи;
- на 13-ю неделю – 95 продаж;
- на 14-ю неделю – 109 продаж.

4.3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Имеются данные об объемах продаж некоторой фирмы в стоимостном выражении (табл. 2.12). С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на 3 недели вперед.

Таблица 2.12. **Данные об объемах продаж, усл. ед.**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я
Стоимость проданной продукции	40	42	43	46	49	50	56	62	65	63	70

Ответ: 74, 79, 83.

Вариант 2. Имеются данные о продаже автомобилей некоторой фирмой за 9 недель ее работы (табл. 2.13). С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на три недели вперед.

Таблица 2.13. **Данные о продаже автомобилей**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я
Количество проданных единиц	3	10	11	18	21	30	32	37	42

Ответ: прогнозы 47, 52, 57.

Вариант 3. Имеются данные о продаже холодильников некоторой фирмой за 10 недель ее работы (табл. 2.14). С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на 3 недели вперед.

Таблица 2.14. **Данные о продаже холодильников**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я
Количество проданных единиц	15	15	16	22	32	39	49	58	65	67

Ответ: 82, 92, 103.

Вариант 4. Имеются данные о продаже товаров некоторой фирмой за 11 месяцев ее работы (табл. 2.15). С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на 2 месяца вперед.

Таблица 2.15. **Данные о продаже товаров**

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й
Количество проданных единиц	18	25	27	26	30	37	35	40	48	53	57

Ответ: 63, 69.

Вариант 5. Число общеобразовательных школ Республики Беларусь по годам приведено в табл. 2.16. С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на 2002 и 2003 гг. (При решении рекомендуется ввести номера временных периодов: 1, 2, …).

Таблица 2.16. **Число общеобразовательных школ Республики Беларусь**

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Число школ	5007	4964	4918	4880	4830	4772	4718

Ответ: 4679, 4631.

Вариант 6. В табл. 2.17 приведено количество студентов вузов Республики Беларусь. С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на 2002 и 2003 гг. (При решении рекомендуется ввести номера временных периодов: 1, 2, …).

Таблица 2.17. **Количество студентов вузов Республики Беларусь, тыс. чел.**

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Число студентов	197,4	208,9	224,5	244	262,1	281,7	301,8

Ответ: 316,7; 334,4.

Вариант 7. Имеются данные о продаже товаров некоторой фирмой за 12 недель ее работы (табл. 2.18). С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на три недели вперед.

Таблица 2.18. **Данные о продаже товаров**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я	12-я
Количество проданных единиц	8	8	9	12	17	16	26	25	35	33	39	52

Ответ: 62, 74, 88.

Вариант 8. Имеются данные о продаже товаров некоторой фирмой за 12 месяцев ее работы (табл. 2.19). С помощью графика подобрать линию тренда, которая лучше всего описывает фактические данные и на ее основе сделать прогноз на два месяца вперед.

Таблица 2.19. **Данные о продаже товаров**

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й	11-й	12-й
Количество проданных единиц	45	65	85	99	102	101	120	107	120	115	118	121

Ответ: 128, 130.

Контрольные вопросы

1. Что такое тренд? Влияние каких факторов на поведение исследуемого показателя он отражает?
2. В чем суть и условия применения метода экстраполяции?
3. Что такое кривая роста? Приведите примеры кривых роста.
4. Для чего применяется метод наименьших квадратов? В чем его суть?
5. Как определить, какая трендовая модель лучше соответствует фактическим данным?
6. В чем ограниченность возможностей команды *Добавить линию тренда…* пакета MS Excel?

Лабораторная работа 5.
Реализация метода наименьших квадратов с помощью надстройки *Поиск решения*

5.1. Основные теоретические сведения

Решение задачи прогнозирования на основе трендовой модели можно условно разбить на следующие этапы:

1. Анализ исходных данных и подбор одной или нескольких трендовых моделей, называемых функциями-кандидатами.
2. Определение параметров этих моделей на основе метода наименьших квадратов.
3. Оценка адекватности (соответствия исследуемому процессу) и точности каждой модели. В качестве показателя точности обычно используется коэффициент детерминации R^2 (2.4).
4. Выбор наиболее адекватной и точной модели.
5. Составление прогноза по этой модели путем подстановки в уравнение тренда значения времени, относящегося к будущему.

Графический способ подбора уравнения тренда позволяет автоматизировать этапы 2 и 3. Однако эта возможность существует только для некоторых (стандартных) кривых роста. Более универсальным способом определения параметров тренда является реализация метода наименьших квадратов с помощью надстройки *Поиск решения*. Этим способом можно определить параметры как стандартных, так и любых других уравнений тренда. Так, например, с его помощью можно определить параметры кривой Гомперца, модифицированной экспоненты или обратной функции тренда.

Суть ***метода наименьших квадратов*** состоит в том, что подбираются такие параметры тренда, чтобы сумма квадратов разностей теоретических и расчетных значений была минимальной (см. формулу 2.3).

Для решения задачи минимизации этой функции можно использовать надстройку *Поиск решения*. Перед ее вызовом нужно подготовить данные на листе Excel следующим образом:

1. Ввести исходные (фактические) данные.

2. Отвести ячейки под неизвестные пока значения параметров тренда и заполнить их некоторыми начальными значениями.

3. Для каждого момента времени рассчитать соответствующее теоретическое значение по выбранной функции тренда, используя ссылки на ячейки параметров.

4. Сформировать ячейку, содержащую формулу целевой функции (2.3). Удобно использовать для этой цели стандартную функцию Excel СУММКВРАЗН(массив_X; массив_Y), аргументами которой являются диапазоны фактических и теоретических значений экономического показателя. Ввод этой функции осуществляется с помощью *Мастера функций*, вызываемого нажатием кнопки на панели инструментов (категория *Математические*).

После вызова надстройки *Поиск решения* и оптимизации функции (2.3) будут найдены параметры тренда в отведенных для них ячейках. Для оценки точности полученной модели нужно реализовать расчет коэффициента детерминации по формуле (2.4). При этом используются известные функции: СРЗНАЧ() и СУММ().

5.2. Пример решения задачи

Имеются фактические данные по количеству брака на предприятии (табл. 2.20).

Таблица 2.20. **Данные по количеству брака на предприятии**

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й
Количество бракованных деталей, шт.	146	115	91	80	78	73	75	70

С помощью надстройки *Поиск решения* определить параметры и коэффициент детерминации для обратного тренда вида

$$y = a + \frac{b}{t}. \qquad (2.6)$$

Сделать прогноз на два месяца вперед.

Порядок выполнения работы

1. Ввод исходных данных задачи. В ячейки A1 и B1 ввести заголовки исходных данных, в ячейки A2:A9 – номера месяцев, а в ячейки B2:B9 – фактические данные по количеству брака (рис. 2.16).

2. Подготовка экрана Excel для запуска надстройки *Поиск решения*. Ячейки A13:B13 отведем для неизвестных пока коэффициентов тренда a и b. Снабдим их соответствующими заголовками, обведем рамочкой и зададим в них начальные значения параметров (например, нулевые).

В ячейки C2:C9 нужно записать теоретические значения показателя, т. е. рассчитанные по формуле (2.6) для каждого месяца. При этом в качестве параметров a и b нужно использовать содержимое ячеек A13 и B13. Введем в ячейку C2 формулу =$A$13+$B$13/A2. Скопируем эту формулу с помощью автозаполнения в ячейки C3:C9.

	A	B	C	D
1	месяцы	количество бракованных деталей (факт)	теоретическое значение	квадрат отклонения от среднего
2	1	146	0	3025
3	2	115	0	576
4	3	91	0	0
5	4	80	0	121
6	5	78	0	169
7	6	73	0	324
8	7	75	0	256
9	8	70	0	441
10		среднее:	Суммквразн:	Сумма:
11		91	71160	4912
12	a	b	R^2	
13	0	0	-13,48697068	

Рис. 2.16. **Исходные данные и подготовка информации для *Поиска решения***

В ячейке C11 запишем формулу суммы квадратов разностей (2.3). Для этого можно использовать специальную функцию Excel СУММКВРАЗН(), аргументами которой являются диапазоны фактических (B2:B9) и теоретических (C2:C9) значений экономического показателя. Для ввода этой функции можно использовать *мастер функций*. Вид листа Excel в режиме представления формул показан на рис. 2.17.

	A	B	C	D
1	месяцы	количество бракованных деталей (факт)	теоретическое значение	квадрат отклонения от среднего
2	1	146	=$A$13+$B$13/A2	=(B2-$B$11)^2
3	2	115	=$A$13+$B$13/A3	=(B3-$B$11)^2
4	3	91	=$A$13+$B$13/A4	=(B4-$B$11)^2
5	4	80	=$A$13+$B$13/A5	=(B5-$B$11)^2
6	5	78	=$A$13+$B$13/A6	=(B6-$B$11)^2
7	6	73	=$A$13+$B$13/A7	=(B7-$B$11)^2
8	7	75	=$A$13+$B$13/A8	=(B8-$B$11)^2
9	8	70	=$A$13+$B$13/A9	=(B9-$B$11)^2
10		среднее:	Суммквразн:	Сумма:
11		=СРЗНАЧ(B2:B9)	=СУММКВРАЗН(B2:B9;C2:C9)	=СУММ(D2:D9)
12	a	b	R2	
13	0	0	=1-C11/D11	

Рис. 2.17. **Исходные данные задачи в режиме представления формул**

Кроме определения параметров тренда, в задаче следует рассчитать коэффициент детерминации модели по формуле (2.4). Этот показатель характеризует точность модели, т. е. насколько хорошо модель описывает имеющиеся фактические данные.

Введем в ячейку B11 формулу вычисления среднего значения уровней ряда

=СРЗНАЧ(B2:B9).

В столбце D рассчитаем квадрат отклонения фактического значения показателя от его среднего значения. Для этого в ячейку D2 введем формулу

=(B2-$B$11)^2.

Скопируем данную формулу с помощью автозаполнения в ячейки D3:D9.

В ячейке D11 подсчитаем сумму этих величин с помощью следующей формулы:

=СУММ(D2:D9).

Таким образом, в ячейке D11 мы получаем знаменатель дроби из формулы (2.5):

$$\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\bar{y}\right)^2 .$$

Величину коэффициента детерминации по формуле (2.4) рассчитаем в ячейке C13:

=1–C11/D11.

После определения оптимальных параметров тренда число в этой ячейке будет характеризовать точность найденной модели.

3. Определение параметров тренда с помощью надстройки *Поиск решения*.

Вызовем надстройку *Поиск решения* командой *Сервис* / *Поиск решения*… .

Окно *Поиск решения* заполним как показано на рис. 2.18. Целевой ячейкой является ячейка C11, содержащая формулу суммы квадратов разностей фактического и теоретического значений.

Следует подобрать такие значения параметров тренда в ячейках A13:B13, чтобы ячейка C11 была минимальной. Ограничений в этой задаче нет. Параметры изменять не нужно.

Нажатие кнопки *Выполнить* активизирует процесс поиска решения, результатом которого являются значения параметров *a* и *b*, показанные на рис. 2.19.

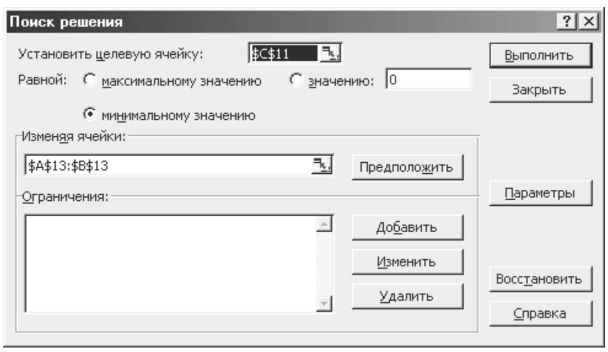

Рис. 2.18. **Окно *Поиск решения* для решения задачи определения параметров тренда**

	A	B	C	D
1	месяцы	количество бракованных деталей (факт)	теоретическое значение	квадрат отклонения от среднего
2	1	146	149,7379077	3025
3	2	115	105,2575218	576
4	3	91	90,43072657	0
5	4	80	83,01732893	121
6	5	78	78,56929035	169
7	6	73	75,60393129	324
8	7	75	73,48581768	256
9	8	70	71,89723247	441
10		среднее:	Суммкврразн:	Сумма:
11		91	131,3129693	4912
12	a	b	R2	
13	60,777	88,96077168	0,973266904	

Рис. 2.19. **Результаты решения задачи определения параметров обратного тренда**

Таким образом, уравнение тренда имеет следующий вид:

$$y = 60{,}777 + \frac{88{,}96077}{t}.$$

Коэффициент детерминации для этой модели равен $R^2 = 0{,}9733$.

Это довольно хороший показатель, который позволяет надеяться на достоверность прогноза.

4. Построение графика фактических значений и линии тренда. Для наглядного представления модели построим графики фактических значений и кривой роста. Очевидно, что значения в столбце C рассчитаны на основании уравнения тренда и поэтому принадлежат на графике кривой роста. Выделим диапазон A1:C9, вызовем мастер диаграмм нажатием кнопки на панели инструментов, и построим диаграмму типа точечная как показано на рис. 2.20.

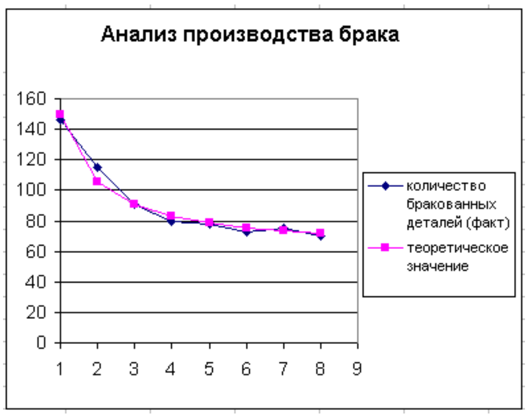

Рис. 2.20. **График фактических значений количества брака и кривая роста**

5. Выполнение прогнозов. Для того, чтобы сделать прогноз, нужно подставить в уравнение тренда значение момента времени, относящееся к будущему.

Введем в ячейки A15 и A16 номера следующих двух месяцев (9 и 10). В соответствующие ячейки столбца C запишем формулы расчета по линии тренда, т. е. в ячейку C15 введем формулу

=$A$13+$B$13/A15.

Скопируем данную формулу в ячейку C16. Результат вычисления по этим формулам показан на рис. 2.21. Таким образом, прогноз количества бракованных деталей на 9-й месяц составляет примерно 71 деталь, а на 10-й месяц – примерно 70 деталей.

15	9		70,6616662
16	10		69,67321318

Рис. 2.21. **Прогнозы по найденной модели**

Добавим эти прогнозы на график кривой роста. Для этого выделим ячейки C15:C16 и скопируем их в буфер обмена. Затем выполним щелчок мышью по графику и вставим данные из буфера. В результате график кривой роста будет продолжен вперед на два месяца (рис. 2.22).

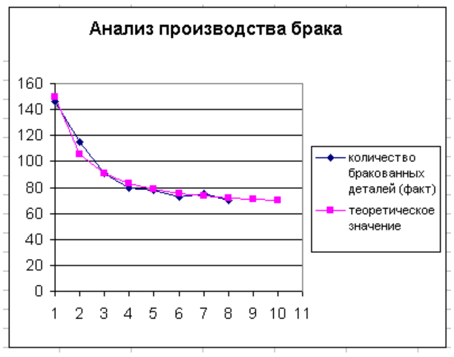

Рис. 2.22. **Иллюстрация прогнозов по линии тренда на графике**

*5.3. Задания для самостоятельной работы**

Вариант 1. В табл. 2.21 приведены данные об объеме продаж фирмы, торгующей подержанными автомобилями, в течение 12 недель ее работы. С помощью надстройки *Поиск решения* определить параметры тренда вида: $y = at^2 + (b / t)$. Оценить точность этой модели. Сделать прогноз на две недели вперед.

Таблица 2.21. **Данные об объеме продаж подержанных автомобилей**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я	12-я
Количество проданных единиц	6	20	19	41	50	59	120	123	151	220	241	260

Ответ: a = 1,95, b = 9,94, R^2 = 0,9844.

Вариант 2. Имеются данные об объеме продаж некоторой фирмы (табл. 2.22). С помощью надстройки *Поиск решения* определить параметры простой экспоненциальной модели. Оценить точность этой модели. Сделать прогноз на две недели вперед. (Учтите, что начальное приближение для параметра b следует задавать числом, отличным от нуля, например равным единице).

Таблица 2.22. **Данные об объеме продаж**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я	12-я
Количество проданных единиц	34	35	35	41	43	42	53	55	51	64	68	69

Ответ: a = 30,070, b = 1,074, R^2 = 0,948.

Вариант 3. Себестоимость некоторой продукции снижается каждый месяц, как показано в табл. 2.23. Определите параметры тренда $y = at + (b / t) + c$ и оцените точность этой модели. Сделайте прогноз на 2 месяца вперед.

Таблица 2.23. **Снижение себестоимости**

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й
Себестоимость продукции, усл. ед.	56	54	53	47	46	40	39	38	39

Ответ: a = –2,108, b = 9,5264, c = 54,2760, R^2 = 0,9291.

Вариант 4. В табл. 2.24 приведены статистические данные о продаже алкогольных напитков на душу населения в Республике Беларусь. Предположив в качестве тренда полином второй степени, определите его параметры с помощью надстройки *Поиск решения*. Оцените точность этой модели. Сделайте прогноз о продаже алкоголя на 2003 г. (при решении рекомендуется ввести номера временных периодов: 1, 2, …).

Таблица 2.24. **Статистические данные о продаже алкогольных напитков**

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Количество алкоголя, л	6,7	7,4	7,8	8,9	9,7	8,8	8,8

Ответ: a_0 = 5,2143, a_1 = 1,4024, a_2 = –0,1262, R^2 = 0,8787.

Вариант 5. В табл. 2.25 приведены статистические данные о численности безработных в Республике Беларусь, зарегистрированных органами государственной службы занятости на конец каждого года (тыс. чел.). С помощью надстройки *Поиск решения* определить параметры и коэффициент детерминации для обратного тренда вида (2.6). Сделать прогноз на два года вперед (при решении рекомендуется ввести номера временных периодов: 1,2, …).

* Формулы различных трендовых моделей приведены в лабораторной работе 2.

Таблица 2.25. **Статистические данные о численности безработных в Республике Беларусь**

Годы	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Количество безработных	182,5	126,2	105,9	95,4	95,8	102,9

Ответ: $a = 75{,}1401$, $b = 105{,}2484$, $R^2 = 0{,}9702$.

Вариант 6. Динамика розничного товарооборота торговой фирмы приведена в табл. 2.26 (в процентах к 1990 г.). Определить параметры тренда вида $y = a_0 + a_1t + (a_2 / t)$. Оценить точность этой модели. Сделать прогноз на два года вперед (при решении рекомендуется ввести номера временных периодов: 1, 2, …).

Таблица 2.26. **Динамика розничного товарооборота торговой фирмы, % к 1990 г.**

Годы	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Товаро-оборот	100	69	54	56	70	74	85	100	105	122

Ответ: $a_0 = –16{,}2357$, $a_1 = 12{,}5028$, $a_2 = 105{,}7374$, $R^2 = 0{,}9735$.

Вариант 7. Имеются данные об объеме продаж некоторой фирмы (табл. 2.27). С помощью надстройки *Поиск решения* определить параметры простой экспоненциальной модели. Оценить точность этой модели. Сделать прогноз на 2 месяца вперед. (Учтите, что начальное приближение для параметра b следует задавать равным числу, отличному от нуля, например, единице).

Таблица 2.27. **Данные об объеме продаж, р.**

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
Объем продаж	92	106	108	131	134	135	158	160	182	199

Ответ: $a = 88{,}0719$, $b = 1{,}0834$, $R^2 = 0{,}9752$.

Вариант 8. Динамика числа продаж некоторой фирмы, торгующей бытовой техникой, приведена ниже в табл. 2.28. Используя надстройку *Поиск решения*, определить параметры полинома второй степени. Оценить точность модели. Сделать прогноз на 3 месяца вперед.

Таблица 2.28. **Динамика числа продаж**

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й
Количество проданных единиц	40	55	89	122	152	250	301	360	430

Ответ: $a_2 = 3{,}8755$, $a_1 = 11{,}6947$, $a_0 = 18{,}6905$, $R^2 = 0{,}9925$.

Контрольные вопросы

1. Каковы этапы решения задачи прогнозирования на основе трендовой модели?
2. В чем суть и назначение метода наименьших квадратов?
3. Для чего рассчитывается коэффициент детерминации R^2?
4. Как выполняется прогноз на основе трендовой модели?
5. В чем преимущества использования надстройки *Поиск решения* для реализации метода наименьших квадратов?
6. Какие стандартные функции Excel используются в данной работе?

Лабораторная работа 6. Использование встроенных функций Excel в задачах прогнозирования

6.1. Основные теоретические сведения

Поскольку тренд по своей сути является уравнением регрессии исследуемого показателя Y на время t, для определения параметров тренда и выполнения прогнозов можно использовать встроенные функции Excel категории *Статистические*. Эти функции можно применять только для двух основных трендовых моделей: линейной и экспоненциальной.

Встроенные функции для определения параметров тренда:

- НАКЛОН(изв_знач_y;изв_знач_x) определяет коэффициент наклона линейного тренда к оси абсцисс (коэффициент a_1);
- ОТРЕЗОК(изв_знач_y;изв_знач_x) определяет точку пересечения линейного тренда с осью ординат (коэффициент a_0);

- ЛИНЕЙН(изв_знач_y;изв_знач_x;константа;статистика) возвращает массив коэффициентов $\{a_m, a_{m-1},\ldots, a_1, a_0\}$ многомерной линейной регрессии вида

$$\tilde{y} = a_m \cdot X_m + a_{m-1} \cdot X_{m-1} + \ldots + a_1 \cdot X_1 + a_0 .$$

- ЛГРФПРИБЛ(изв_знач_y;изв_знач_x;константа;статистика) возвращает параметры $\{b_m, b_{m-1},\ldots, b_1, a\}$ экспоненциальной многофакторной модели

$$\tilde{y} = a \cdot b_1^{X_1} \cdot b_2^{X_2} \cdot \ldots \cdot b_m^{X_m} .$$

Встроенные функции для получения точечных прогнозов:

- ПРЕДСКАЗ(x; изв_знач_y;изв_знач_x) вычисляет теоретическое значение y_x в одной точке x на основе линейной модели;
- ТЕНДЕНЦИЯ(изв_знач_y;изв_знач_x;нов_знач_x;константа) вычисляет теоретическое значение на основе линейной модели для целого диапазона новых значений x;
- РОСТ(изв_знач_y;изв_знач_x;нов_знач_x;константа) вычисляет значение экспоненциального тренда $y = a \cdot b^x$ для диапазона новых значений x.

Таким образом, функции для получения точечных прогнозов объединяют два этапа прогнозирования: определение параметров тренда на основе метода наименьших квадратов и использование найденных параметров для выполнения прогноза.

6.2. Пример решения задачи

Имеются данные о продаже товаров некоторой фирмой за 10 месяцев ее работы (табл. 2.29).

Таблица 2.29. **Данные о продаже товаров**

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
Количество проданных единиц	18	25	27	26	30	37	35	40	48	53

Сделать прогноз продаж на три месяца вперед с помощью стандартных функций Excel на основании: а) линейной модели; б) экспоненциальной модели. Укажите, какой прогноз более точен.

Порядок выполнения работы

1. Ввод исходных данных задачи. В ячейки A1 и B1 введем заголовки исходных данных, в ячейки A2:A11 – номера месяцев, а в ячейки B2:B11 – соответствующее количество продаж (фактические данные) (рис. 2.23).

	A	B	C	D
1	Месяцы	Количество продаж	Параметры линейной модели	
2	1	18	a1(НАКЛОН)	a0(ОТРЕЗОК)
3	2	25	3,484848485	14,73333333
4	3	27	Функция ЛИНЕЙН()	
5	4	26	3,484848485	14,73333333
6	5	30	0,318628835	1,977039926
7	6	37	0,937313069	2,894090112
8	7	35	119,6183068	8
9	8	40	1001,893939	67,00606061
10	9	48		
11	10	53		
12	Линейные прогнозы			
13	месяцы	по формуле	Функция ПРЕДСКАЗ	Функция ТЕНДЕНЦИЯ
14	11	53,0666667	53,06666667	53,06666667
15	12	56,5515152	56,55151515	56,55151515
16	13	60,0363636	60,03636364	60,03636364

Рис. 2.23. **Исходные данные и расчеты по линейной модели**

2. Расчет параметров линейной модели. В ячейки столбцов C и D введем соответствующие заголовки. В ячейке C3 разместим формулу расчета параметра a_1 линейного тренда $y = a_1 \cdot t + a_0$ с использованием функции НАКЛОН():

=НАКЛОН(B2:B11;A2:A11).

Для ввода этой формулы будем использовать *Мастер функций*, категория *Статистические*. Окно мастера функций для функции НАКЛОН() показано на рис. 2.24.

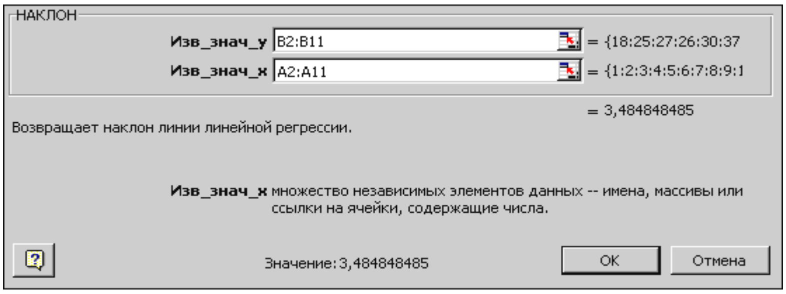

Рис. 2.24. **Окно мастера функций для ввода функции НАКЛОН()**

Аргументы этой функции следующие:

- *Изв_знач_у* – это диапазон ячеек, содержащих фактические значения показателя (количество продаж B2:B11).
- *Изв_знач_х* – это диапазон ячеек, содержащих значения моментов времени, для которых были измерены фактические значения показателя (номера месяцев A2:A11).

Аналогично в ячейку D3 введем функцию ОТРЕЗОК() для расчета параметра a_0: =ОТРЕЗОК(B2:B11;A2:A11).

Далее нужно рассчитать параметры линейного тренда и дополнительную статистику по линейной регрессии с помощью функции ЛИНЕЙН(). Результатом вычислений этой функции является массив значений. Поэтому, прежде, чем задать эту функцию, нужно выделить диапазон ячеек, который всегда содержит 5 строк и k столбцов, где k – количество параметров регрессии, которые нужно определить. В нашем случае однофакторной регрессии нужно определить два параметра: a_1 и a_0, т. е. $k = 2$. Порядок ввода функции ЛИНЕЙН() следующий:

- Выделить ячейки C5:D9 (5 строк и 2 столбца).
- Вызвать мастер функций кнопкой f_x на панели инструментов. В категории *Статистические* выбрать функцию ЛИНЕЙН(). Задать аргументы этой функции, как показано на рис. 2.25. После ввода всех аргументов функции ЛИНЕЙН() следует нажать кнопку *OK*.

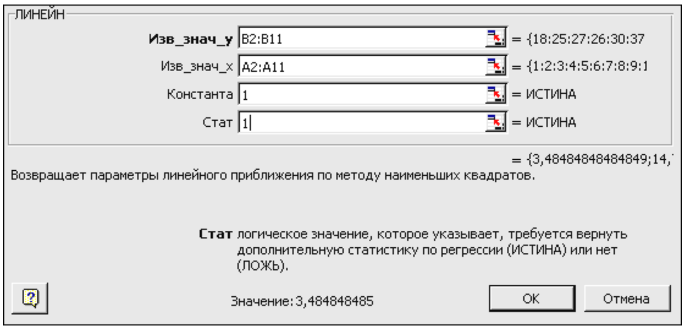

Рис. 2.25. **Окно мастера функций для ввода функции ЛИНЕЙН()**

- Установить курсор в строку формул и нажать комбинацию клавиш *Ctrl+Shift+Enter*. После этого в строке формул появятся фигурные скобки, а весь предварительно выделенный диапазон заполнится значениями, которые выдает функция ЛИНЕЙН().

Аргументы этой функции *Изв_знач_у* и *Изв_знач_х* имеют тот же смысл, что и в функции НАКЛОН().

Аргумент *Константа* показывает, требуется ли, чтобы $a_0 = 0$. Если константа=ИСТИНА или опущена, то a_0 вычисляется обычным образом.

Аргумент *Статистика* показывает, требуется ли вывести дополнительную статистику по регрессии. Если статистика=ИСТИНА, то дополнительная информация выдается; если же статистика=ЛОЖЬ или опущена, то дополнительной информации нет. Ввод числа 1 равносилен вводу значения ИСТИНА.

Результаты расчетов параметров линейной регрессии показаны на рис. 2.23. Очевидно, что расчеты с помощью функций НАКЛОН() и ОТРЕЗОК() дают такие же результаты, что и функция ЛИНЕЙН(). Обратите внимание, что функция ЛИНЕЙН() дает параметры тренда в первой строке именно в следующем порядке: $\{a_1, a_0\}$. Остальные четыре строки выделенного нами диапазона заполняются различными статистическими характеристиками тренда (среднеквадратические отклонения полученных параметров тренда, расчетные величины для оценки достоверности полученных результатов и т. д.). Из этих величин в данной лабораторной работе нас будет интересовать только одна: коэффициент детерминации линейной модели R^2, который находится в третьей строке первом столбце: $R^2 = 0,9373$. Таким образом, линейный тренд достаточно точно описывает исходные данные.

3. Выполнение прогнозов по линейной модели. Прогнозы на три месяца вперед по линейной модели будем выполнять тремя способами:

- с использованием рассчитанных нами параметров тренда;
- с использованием функции ПРЕДСКАЗ();
- с использованием функции ТЕНДЕНЦИЯ().

Введем в ячейки A12:D13 соответствующие заголовки, а в ячейки A14:A16 – номера месяцев, для которых нужно сделать прогноз (см. рис. 2.23).

1. В ячейку B14 введем формулу линейного тренда, в которой используются величины параметров, рассчитанные с помощью функции ЛИНЕЙН() в ячейках C5 и D5: =$C$5*A14+$D$5 и скопируем ее с помощью автозаполнения в ячейки B15 и B16.

2. В ячейку C14 введем формулу =ПРЕДСКАЗ(A14; $B$2:$B$11; $A$2:$A$11).

Для ввода формулы будем использовать мастер функций (рис. 2.26). Эта функция вычисляет прогноз для 11-го месяца (число 11 записано в ячейке A14). Аргументы *Изв_знач_y* и *Изв_знач_x* имеют тот же смысл, что и в функции НАКЛОН(). Мы задали эти значения абсолютными ссылками для того, чтобы затем правильно скопировать эту формулу.

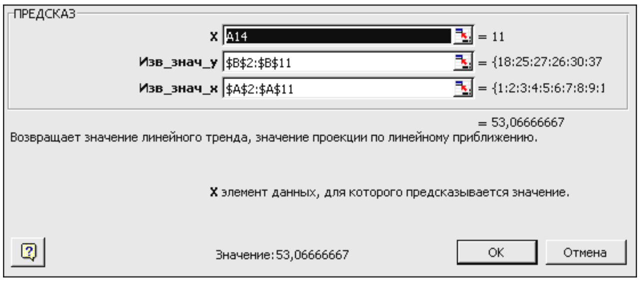

Рис. 2.26. **Окно мастера функций для ввода функции ПРЕДСКАЗ()**

Нажав кнопку *OK* для завершения ввода формулы в ячейку C14, скопируем эту формулу в ячейки C15 и C16 с помощью автозаполнения.

3. В ячейках D14:D16 нужно получить те же прогнозы с помощью функции ТЕНДЕНЦИЯ(). Эта функция своим результатом имеет массив значений, поэтому ее нужно вводить так же, как и функцию ЛИНЕЙН(): сначала выделить диапазон, в котором будет размещаться результат (D14:D16), затем вызвать мастер функций и задать аргументы функции ТЕНДЕНЦИЯ() как показано на рис. 2.27, а после нажатия кнопки *OK* установить курсор в строку формул и завершить ввод нажатием клавиш *Ctrl+Shift+Enter*.

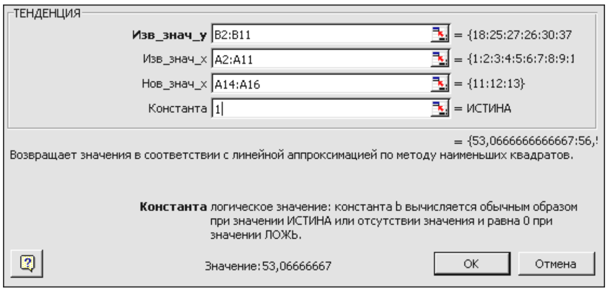

Рис. 2.27. **Окно мастера функций для ввода функции ТЕНДЕНЦИЯ()**

Аргументы *Изв_знач_y*, *Изв_знач_x* и *Константа* имеют тот же смысл, что и в функции ЛИНЕЙН(). Аргумент *Нов_знач_x* – это диапазон значений независимой переменной *x* (в нашем случае номера месяцев), для которого нужно получить прогнозные значения.

Результаты прогнозирования показаны на рис. 2.23. Естественно, что результаты, полученные различными способами, совпадают.

4. Расчет параметров экспоненциальной модели. Для определения параметров экспоненциальной модели $\tilde{y} = a \cdot b^t$ будем использовать встроенную функцию Excel ЛГРФПРИБЛ(). Эта функция возвращает параметры экспоненциальной регрессии, рассчитанные по методу наименьших квадратов, а также дополнительную статистику по регрессии. Аргументы этой функции аналогичны аргументам функции ЛИНЕЙН(). Отличие в том, что *Константа* показывает, требуется ли значение *a* вычислять обычным образом (значение ИСТИНА), или параметр *a* должен быть равен 1 (значение ЛОЖЬ). Самостоятельно введите эту функцию в ячейки E3:F7 аналогично п. 2 (учитывайте, что результат работы этой функции – массив значений). Результат вычислений с помощью функции ЛГРФПРИБЛ() можно увидеть на рис. 2.28.

	E	F
1	Параметры экспоненциальной модели	
2	Функция ЛГРФПРИБЛ()	
3	1,11089403	18,13227466
4	0,00891956	0,055344435
5	0,94558315	0,081015958
6	139,013282	8
7	0,91242555	0,052508683
8		
9		
10		
11		
12	Экспоненциальные прогнозы	
13	по формуле	Функция РОСТ()
14	57,6568963	57,65689633
15	64,0507021	64,05070206
16	71,1535427	71,15354269

Рис. 2.28. **Прогнозы и параметры экспоненциальной модели**

Функция ЛГРФПРИБЛ() дает в первой строке параметры экспоненциальной модели в следующем порядке: $\{b, a\}$. Таким образом, нами получено: $a = 18{,}13$; $b = 1{,}11$. В третьей строке первом столбце имеем значение коэффициента детерминации $R^2 = 0{,}9456$. Эта величина больше, чем коэффициент детерминации линейной модели. Следовательно, экспоненциальная модель лучше описывает исходные данные.

5. Выполнение прогнозов по экспоненциальной модели. Для выполнения прогнозов будем использовать:

- формулу $\tilde{y} = a \cdot b^t$, где параметры a и b рассчитаны в п. 4;
- встроенную функцию Excel РОСТ().

1. В ячейку E14 введем формулу расчета по экспоненциальному тренду: =$F$3*$E$3^A14.

В этой формуле использованы рассчитанные с помощью функции ЛГРФПРИБЛ() параметры тренда (a в ячейке F3 и b в ячейке E3). Даны абсолютные ссылки на адреса параметров для того, чтобы можно было правильно скопировать эту формулу. Выполнив копирование этой формулы в ячейки E15 и E16 с помощью автозаполнения, получим прогнозы на три месяца вперед, как показано на рис. 2.28.

2. Функция РОСТ() дает прогнозы по экспоненциальной модели для целого диапазона новых значений независимой переменной x (в нашем случае в качестве переменной x выступает время – номера месяцев). Результатом функции является массив значений. Порядок ввода функции РОСТ() и ее параметры аналогичны функции ТЕНДЕНЦИЯ() (см. п. 3). Самостоятельно введите функцию РОСТ(B2:B11;A2:A11;A14:A16;1) в ячейки F14:F16. Результат расчетов показан на рис. 2.28. Очевидно, что прогнозы по экспоненциальной модели, полученные двумя способами, совпадают.

6.3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Себестоимость некоторой продукции изменяется, как показано в табл. 2.30.

Таблица 2.30. **Изменение себестоимости продукции, усл. ед.**

Месяц	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й
Себестоимость продукции	56	54	50	47	48	46	39	38	35

Сделать прогноз снижения себестоимости на два месяца вперед с помощью стандартных функций Excel на основании: а) линейной модели; б) экспоненциальной модели. Указать, какой прогноз более точен.

Ответ: линейные прогнозы: 33; 30.

Вариант 2. В табл. 2.31 приведены годовые данные о трудоемкости производства 1 т цемента.

Таблица 2.31. **Годовые данные о трудоемкости производства 1 т цемента, нормо-смен**

Текущий номер года	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й	8-й	9-й	10-й
Трудоемкость 1 т цемента	7,9	8,3	7,5	6,9	7,2	5,6	5,8	4,9	5,1	4,4

Сделать прогноз по этому показателю на два года вперед с помощью стандартных функций Excel на основании: а) линейной модели; б) экспоненциальной модели. Определить, какой прогноз более точен.

Ответ: линейные прогнозы: 3,97; 3,53.

Вариант 3. В табл. 2.32 приведено количество студентов вузов Республики Беларусь.

Таблица 2.32. **Количество студентов вузов Республики Беларусь, тыс. чел.**

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Число студентов	197,4	208,9	224,5	244	262,1	281,7	301,8

Сделать прогноз количества студентов на 2 года вперед с помощью стандартных функций Excel на основании: а) линейной модели; б) экспоненциальной модели. Выяснить, какой прогноз более точен.

Ответ: экспоненциальные прогнозы: 324,9; 349,2.

Вариант 4. Число общеобразовательных школ Республики Беларусь по годам приведено в табл. 2.33.

Таблица 2.33. **Число общеобразовательных школ Республики Беларусь**

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
Число школ	5007	4964	4918	4880	4830	4772	4718

Сделать прогноз числа школ на два года вперед с помощью стандартных функций Excel на основании: а) линейной модели; б) экспоненциальной модели. Указать, какой прогноз более точен.

Ответ: линейные прогнозы: 4679; 4631.

Вариант 5. Имеются данные о продаже холодильников некоторой фирмой за 10 недель ее работы (табл. 2.34).

Таблица 2.34. **Данные о продаже холодильников**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я
Количество проданных единиц	15	15	23	22	32	39	45	55	65	71

Сделать прогноз количества продаж на две недели вперед с помощью стандартных функций Excel на основании: а) линейной модели; б) экспоненциальной модели. Выяснить, какой прогноз более точен.

Ответ: экспоненциальные прогнозы: 93; 112.

Вариант 6. Имеются данные об объеме продаж некоторой фирмы (табл. 2.35).

Таблица 2.35. **Данные об объеме продаж**

Неделя	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я	12-я
Количество проданных единиц	34	35	35	41	43	42	53	55	51	64	68	69

Сделать прогноз числа продаж на две недели вперед с помощью стандартных функций Excel на основании: а) линейной модели; б) экспоненциальной модели. Определить, какой прогноз более точен.

Ответ: экспоненциальные прогнозы: 75; 81.

Вариант 7. Доля сельского населения Гомельской области показана в табл. 2.36.

Таблица 2.36. **Доля сельского населения Гомельской области, в % к общей численности населения Республики Беларусь**

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Доля сельского населения	33,1	32,8	32,5	32,2	31,8	31,4	31,0	30,5

Сделать прогноз по этому показателю на два года вперед с помощью стандартных функций Excel на основании: а) линейной модели; б) экспоненциальной модели. Указать, какой прогноз более точен.

Ответ: линейные прогнозы: 30,3; 29,9.

Вариант 8. Данные по численности населения Гомельской области приведены в табл. 2.37.

Таблица 2.37. **Данные по численности населения Гомельской области на начало года, тыс. чел.**

Годы	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Численность населения	1571,6	1566,3	1559,5	1552,2	1545,1	1540,3	1535,0	1527,5

Сделать прогноз по этому показателю на два года вперед с помощью стандартных функций Excel используя: а) линейную модель; б) экспоненциальную модель. Выяснить, какой прогноз более точен.

Ответ: экспоненциальные прогнозы: 1521,5; 1515,3.

Контрольные вопросы

1. Какие стандартные функции Excel можно использовать для определения параметров линейного тренда? Какие функции позволяют получить прогноз по линейной модели?
2. Какие стандартные функции Excel применяются для определения параметров экспоненциальной трендовой модели? Какие функции позволяют получить прогноз по этой модели?
3. В чем отличие функции ПРЕДСКАЗ() от функции ТЕНДЕН-ЦИЯ()?
4. Как можно получить дополнительную статистику по регрессии?
5. Как вводятся функции, дающие результат не в одной ячейке, а в диапазоне ячеек?
6. Какой смысл имеет аргумент *Константа* в функциях ЛИНЕЙН(), ТЕНДЕНЦИЯ(), ЛГРФПРИБЛ() и РОСТ()?

3. СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа 7. Расчет временных параметров сетевого графика

7.1. Основные теоретические сведения

7.1.1. Сетевой график и правила его построения

Метод сетевого планирования и управления используется при планировании сложных комплексов взаимосвязанных работ. Анализ сетевой модели позволяет:

- четко выявить взаимосвязь различных этапов проекта, условия начала тех или иных работ;
- определить срок выполнения проекта;
- выявить возможности задержки начала каждой работы или удлинения срока ее выполнения;
- оптимизировать время выполнения проекта или ресурсы, требуемые для его выполнения.

Основой метода сетевого планирования является сетевой график – графическая модель некоторого комплекса взаимосвязанных работ (проекта или производственного процесса). Сетевой график отражает логическую взаимосвязь и взаимообусловленность входящих в него работ. С математической точки зрения сетевой график представляет собой ориентированный граф без контуров, дугам которого приписаны некоторые числовые значения.

Дугам графа соответствуют работы. ***Работой*** называется любой процесс, происходящий во времени. Различают три вида работ:

Действительная работа (———→) – это любой трудовой процесс, требующий ресурсов и имеющий некоторую продолжительность (разработка проекта, подвоз материалов, монтаж оборудования и т. д.)

Ожидание (— · — ·→) – это процесс, не требующий ресурсов, но имеющий некоторую продолжительность (затвердение бетона, сушка штукатурки, рост растений и т. д.)

Фиктивная работа (— — →) отражает логическую зависимость между действительными работами. Не требует ресурсов и имеет нулевую продолжительность.

Над дугой может быть указана числовая характеристика работы (например, время ее выполнения).

Вершинам графа соответствуют события. ***Событие*** означает факт окончания всех работ, в него входящих, и начала всех работ, из него исходящих. Событие не имеет продолжительности и не потребляет ресурсов. Событие в сетевом графике имеет номер. Событие, с которого начинается выполнение проекта, называется ***исходным*** и обозначается I. Исходное событие не имеет предшествующих работ. Событие, которое констатирует факт завершения проекта, называется ***завершающим*** и обозначается S. Завершающее событие не имеет последующих работ.

Работа может обозначаться двумя способами:

1. Парой номеров (i, j), где i – номер начального события работы, j – номер конечного события работы;
2. Буквенно-числовым обозначением с номером работы: a_1, b_2 и т. д.

Продолжительность работы обозначается $t\,(i,j)$.

При построении сетевых графиков необходимо соблюдать следующие правила:

1. В сетевом графике не должно быть событий (кроме исходного), в которые не входит ни одна дуга.
2. Не должно быть событий (кроме завершающего), из которых не выходит ни одной дуги.
3. Сетевой график не должен содержать контуров.
4. Любая пара событий сетевого графика может быть соединена не более чем одной дугой. Если нужно изобразить параллельно выполняемые работы с общими начальными и конечными событиями, то рекомендуется ввести дополнительные события и соединить их с последующими фиктивными работами. Пусть, например, имеются три различные работы a_1, a_2 и a_3, которые начинаются одним событием 2 и заканчиваются одним событием 5 (рис. 3.1). В этой ситуации может возникнуть путаница из-за того, что

различные работы имеют одно и то же обозначение (2,5). Чтобы избежать этого, введем фиктивные работы, как показано на рис. 3.2.

5. События должны быть пронумерованы так, чтобы для любой работы (i,j) номер конечного события был больше номера начального ($j>i$).

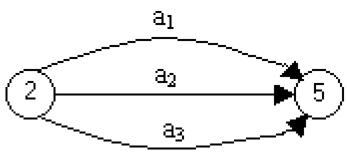

Рис. 3.1. **Фрагмент неверного сетевого графика**

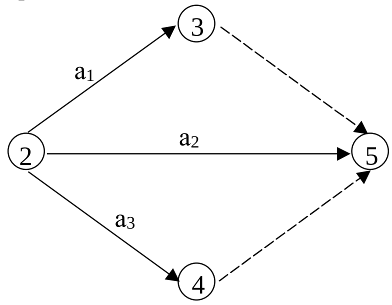

Рис. 3.2. **Правильное изображение параллельных работ**

7.1.2. Временные параметры сетевого графика

К основным параметрам сетевого графика относятся продолжительность выполнения всего проекта (критический срок), сроки свершения и резервы времени событий, сроки выполнения отдельных работ и их резервы времени.

Полный путь в сетевом графике – это цепочка следующих друг за другом работ, соединяющих исходное и завершающее событие. Продолжительность пути равна сумме длительностей принадлежащих ему работ. ***Критическим*** называется полный путь, имеющий *наибольшую* продолжительность во времени. Его продолжительность определяет критическое время (или критический срок) проекта $t_{кр}$. Работы, принадлежащие критическому пути, называются критическими. Их несвоевременное выполнение ведет к срыву сроков всего проекта. Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

Критический срок, таким образом, показывает, за какое *минимальное* время может быть завершен весь проект. Очевидно, что увеличение сроков выполнения проекта больше $t_{кр}$ также невыгодно.

Временные параметры событий являются основой для расчета параметров работ. Рассмотрим один из способов определения этих параметров, основанный на методе динамического программирования.

Ранний срок свершения события – это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию.

$$\begin{cases} t_p(I) = 0 \\ t_p(j) = \max\limits_{i\to j}\{t_p(i) + t(i,j)\}, \end{cases} \qquad (3.1)$$

где $i \to j$ – множество работ, заканчивающихся j-м событием (дуги, входящие в вершину j);

$t_p(i)$ – ранний срок свершения начального события работы (i,j);

$t(i,j)$ – продолжительность работы (i,j).

Ранний срок свершения завершающего события совпадает с критическим сроком: $t_{кр} = t_p(S)$.

Поздний срок свершения события – это такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием, к критическому сроку:

$$\begin{cases} t_n(S) = t_p(S) = t_{кр} \\ t_n(i) = \min\limits_{i\to j}\{t_n(j) - t(i,j)\}, \end{cases} \qquad (3.2)$$

где $i \to j$ – множество работ, начинающихся i-м событием (дуги, исходящие из вершины i);

$t_n(j)$ – поздний срок свершения конечного события работы (i, j);

$t(i, j)$ – продолжительность работы (i, j).

Резерв времени события показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока свершения всего проекта. Резерв времени события равен разности между его поздним и ранним сроком свершения:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)\,. \qquad (3.3)$$

Для событий, принадлежащих критическому пути, ранний и поздний сроки свершения совпадают. Поэтому критические события не имеют резерва времени.

Временные параметры работ определяются на основе параметров свершения событий.

Ранний срок начала работы равен раннему сроку свершения начального события работы:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i)\,. \qquad (3.4)$$

Ранний срок окончания работы равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности:

$$t_{po}(i,j) = t_p(i) + t(i,j)\,. \qquad (3.5)$$

Поздний срок окончания работы совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события:

$$t_{no}(i,j) = t_n(j)\,. \qquad (3.6)$$

Полный резерв времени работы – это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

$$R(i,j) = t_{no}(i,j) - t_{po}(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j)\,. \qquad (3.7)$$

Критические работы резервов времени не имеют.

7.2. Пример решения задачи

Туристская фирма готовится принять участие в выставке-ярмарке туристских услуг. Перечень работ, которые необходимо выполнить в процессе подготовки, приведен в табл. 3.1.

Требуется выполнить следующее:

а) построить сетевой график этого проекта;

б) рассчитать временные параметры событий и работ;

в) определить минимальное время выполнения проекта.

Таблица 3.1. **Перечень работ туристской фирмы**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность работы, дней
Разработка дизайна проекта экспозиции	a_1	–	4
Определение рекламной стратегии	a_2	–	2
Определение количества и видов рекламно-информационных материалов	a_3	a_2	1
Заказ оборудования и рекламных материалов, оплата счетов	a_4	a_1, a_3	5
Заключение договора на участие и оплата аренды	a_5	a_2	2
Доставка оборудования, экспонатов и рекламных материалов	a_6	a_4, a_5	4
Техническое оформление стендов	a_7	a_6	5
Обучение и инструктаж персонала	a_8	a_2	3

Порядок выполнения работы

1. Построение сетевого графика. Обозначим номером 1 событие начала всего проекта (исходное событие). Имеется две работы (a_1 и a_2), которые не имеют предшествующих работ. Следовательно, они начинаются с началом выполнения проекта. Изобразим их в виде дуг графа (стрелочек), выходящих из вершины 1 (исходного события). Над каждой дугой будем записывать наименование работы и в скобках ее продолжительность (рис. 3.3).

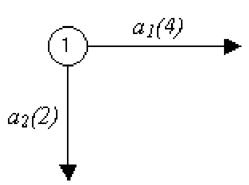

Рис. 3.3. **Шаг 1 построения сетевого графика**

Работе a_3 предшествует работа a_2. Это означает, что работа a_2 должна закончится для того, чтобы могла начаться работа a_3. Обозначим номером 2 событие окончания работы a_2. Тогда на сетевом графике работа a_3 выходит из события 2, т. е. следует непосредственно за дугой a_2 (рис. 3.4).

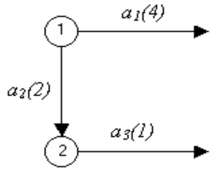

Рис. 3.4. **Шаг 2 построения сетевого графика**

Работе a_4 предшествуют две работы: a_1 и a_3. Поэтому должно существовать событие, обозначающее факт окончания этих двух работ. Дуги a_1 и a_3 направим к одной вершине и обозначим ее следующим номером 3. Дуга a_4 выходит из вершины 3. Таким образом, событие 3 обозначает факт окончания работ a_1 и a_3 и начала работы a_4 (рис. 3.5).

Работе a_5 предшествует работа a_2. На графике уже имеется событие, обозначающее факт окончания этой работы (событие 2). Поэтому изобразим работу a_5 в виде дуги, выходящей из вершины 2 (рис. 3.6).

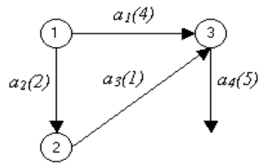

Рис. 3.5. **Шаг 3 построения сетевого графика**

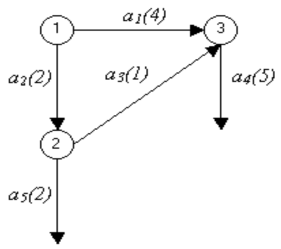

Рис. 3.6. **Шаг 4 построения сетевого графика**

Работе a_6 предшествуют две работы: a_4 и a_5. Поэтому направим дуги a_4 и a_5 к одной вершине и обозначим ее номером 4. Событие 4 обозначает факт окончания обеих работ a_4 и a_5 и начала работы a_6 (рис. 3.7).

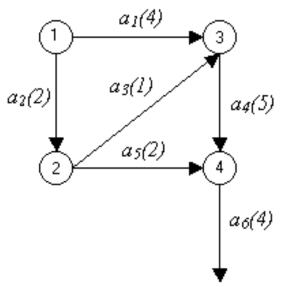

Рис. 3.7. **Шаг 5 построения сетевого графика**

Работе a_7 предшествует работа a_6. Обозначим событие окончания этой работы номером 5. Тогда дуга a_7 выходит из этого события, т. е. непосредственно следует за дугой a_6. Работе a_8 предшествует работа a_2. На сетевом графике уже имеется событие, обозначающее факт окончания работы a_2. Это событие 2. Поэтому изобразим дугу a_8 выходящей из вершины 2. Результат этих построений показан на рис. 3.8.

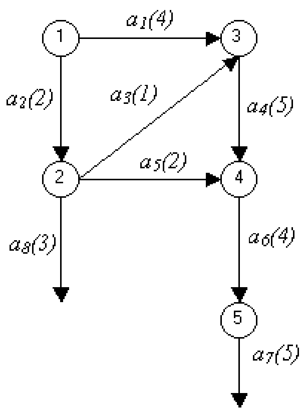

Рис. 3.8. **Шаг 6 построения сетевого графика**

Итак, на графике построены все работы, перечисленные в табл. 7.1. Поскольку сетевой график должен иметь только одно завершающее событие, дуги a_7 и a_8 направим к одной вершине, которой дадим номер 6. Эта вершина представляет собой факт завершения работ a_7 и a_8, а следовательно, и всего проекта (рис. 3.9).

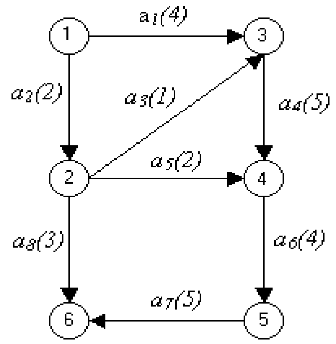

Рис. 3.9. **Итоговый сетевой график примера**

2. Определение критического пути в сетевом графике. Критический путь есть полный путь наибольшей продолжительности. Поэтому для его определения можно перебрать все полные пути в сетевом графике и выбрать тот, который имеет наибольшую продолжительность во времени. В нашем графике можно выделить следующие полные пути (обозначая их вершины):

μ_1 = (1–2–3–4–5–6);
μ_2 = (1–3–4–5–6);
μ_3 = (1–2–4–5–6);
μ_4 = (1–2–6).

Продолжительности этих полных путей следующие:

$t(\mu_1) = 2 + 1 + 5 + 4 + 5 = 17$;
$t(\mu_2) = 4 + 5 + 4 + 5 = 18$;
$t(\mu_3) = 2 + 2 + 4 + 5=13$;
$t(\mu_4) = 2 + 3 = 5$;

Таким образом, наибольшую продолжительность во времени, равную 18, имеет путь μ_2, который и является критическим. Критический срок проекта равен 18 дней, т. е. это минимальный срок, за который будет выполнен проект. Однако такой способ определения критического пути в сетевом графике может быть использован только тогда, когда график является достаточно простым. В случае сложного графика, с большим количеством событий и работ, можно пропустить какой-либо полный путь и получить неверный результат. Способ, основанный на определении временных параметров событий и работ, излагаемый ниже, является более универсальным.

3. Расчет параметров событий сетевого графика. Выполним вычисления непосредственно на графике. Каждый кружок, изображающий событие, разделим на четыре сектора (рис. 3.10).

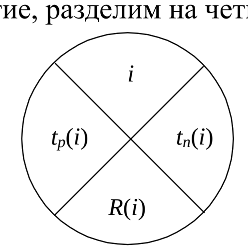

Рис. 3.10. **Представление параметров события на сетевом графике**

В верхнем секторе запишем номер события, в левом по мере вычислений будем записывать ранний срок $t_p(i)$ свершения события i, в правом – поздний срок $t_n(i)$ этого события, а в нижнем – резерв времени $R(i)$ события.

1. Определение ранних сроков свершения событий. Ранний срок свершения исходного события 1 по определению принимается за 0. Событие 2 наступит по окончании работы a_2, которая начинается в момент времени 0 и продолжается 2 дня. Поэтому ранний срок свершения события 2 рассчитываем, как момент окончания этой работы:

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1,2) = 0 + 2 = 2 .$$

Событие 3 есть факт окончания двух работ: a_1 и a_3. Работа a_1 закончится в момент времени $t_p(1) + t(1,3) = 0 + 4 = 4$, а работа a_3 закончится в момент $t_p(2) + t(2,3) = 2 + 1 = 3$. Поскольку событие 3 наступит тогда, когда обе работы a_1 и a_3 завершатся, нужно ориентироваться на ту работу, которая закончится позже, т. е.:

$$t_p(3) = \max\{t_p(1) + t(1,2); t_p(2) + t(2,3)\} = \max\{4,3\} = 4 .$$

Аналогично рассчитывается ранний срок свершения события 4, которое есть факт окончания работ a_4 и a_5:

$$t_p(4) = \max\{t_p(2) + t(2,4); t_p(3) + t(3,4)\} = \max\{2+2; 4+5\} = 9 .$$

Событие 5 наступит, когда закончится работа a_6. Поэтому его ранний срок свершения

$$t_p(5) = t_p(4) + t(4,5) = 9 + 4 = 13.$$

Ранний срок свершения события 6, в которое входят две работы a_7 и a_8, рассчитывается аналогично событиям 3 и 4:

$$t_p(6) = \max\{t_p(2) + t(2,6); t_p(5) + t(5,6)\} = \max\{2+3; 13+5\} = 18 .$$

Таким образом, при расчете раннего срока свершения события j нужно определить максимум величин $t_p(i) + t(i,j)$ по всем входящим в соответствующую вершину дугам.

Результаты расчетов представлены в левых секторах событий на рис. 3.11. Ранний срок свершения завершающего события проекта есть критический срок проекта, т. е. минимальное время, в течение которого может быть завершен проект. В нашей задаче

$$t_{кр} = t_p(6) = 18.$$

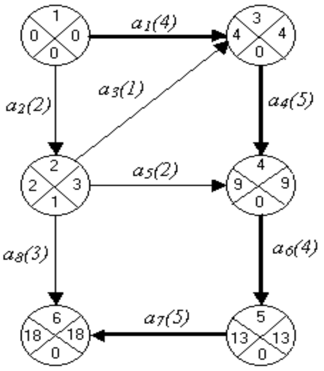

Рис. 3.11. **Параметры событий сетевого графика**

2. Определение поздних сроков свершения событий. Поздние сроки свершения событий рассчитываются “обратным ходом”, от завершающего события к исходному. Поздний срок свершения завершающего события 6 равен его раннему сроку свершения (или критическому сроку):

$$t_n(6) = t_p(6) = t_{кр} = 18.$$

Поздний срок свершения события 5 – это такой самый поздний срок, после которого остается ровно столько времени, сколько требуется для того, чтобы следующая за событием 5 работа a_7 (выходящая из вершины 5 дуга) успела закончиться к критическому сроку. Чтобы эта работа, которая длится 5 дней, закончилась к 18 дню, она должна начаться на 13 день (18 – 5 = 13). Поэтому

$$t_n(5) = t_n(6) - t(5,6) = 18 - 5 = 13.$$

За событием 4 следует работа a_6. Она должна закончится к 13 дню для того, чтобы следующая за ней работа успела к критическому сроку. Поэтому работа a_6 должна начаться на 9 день (13 – 4 = 9). Таким образом,

$$t_n(4) = t_n(4) - t(4,5) = 13 - 4 = 9.$$

Аналогично для события 3, которым начинается одна работа a_4:

$$t_n(3) = t_n(3) - t(3,4) = 9 - 5 = 4.$$

Событием 2 начинаются сразу три работы a_3, a_5 и a_8 (дуги, выходящие из вершины 2). Для событий 3, 4 и 6, означающих соответствующие моменты окончания этих работ, поздние сроки свершения уже рассчитаны. Поэтому работа a_3 должна начаться не позднее $t_n(3) - t(2,3) = 4 - 1 = 3$ дня, работа a_5 – не позднее $t_n(4) - t(2,4) = 9 - - 2 = 7$ дня, а работа a_8 – не позднее $t_n(6) - t(2,6) = 18 - 3 = 15$ дня. Чтобы удовлетворить эти требования для всех трех работ, нужно ориентироваться на минимальный из этих сроков. Поэтому

$$t_n(2) = \min(3;7;15) = 3.$$

Таким образом, при расчете позднего срока свершения события i нужно брать минимум величин $t_n(j) - t(i,j)$ по всем исходящим из данной вершины дугам.

Аналогично для события 1:

$$t_n(1) = \min\{t_n(3) - t(1,3); t_n(2) - t(1,2)\} = \min\{4-4; 3-2\} = 0 .$$

При правильных расчетах поздний срок исходного события должен получиться равным 0, а поздний срок свершения события никогда не должен быть меньше раннего.

Результаты расчетов показаны на графике в правых секторах событий (см. рис. 3.11).

3. *Определение резервов времени событий.* Резерв времени события определяется как разность между поздним и ранним сроками свершения этого события:

$R(1) = t_п(1) – t_р(1) = 1 – 1 = 0;$

$R(2) = t_п(2) – t_р(2) = 3 – 2 = 1$ и т. д.

Резервы времени событий показаны в нижних секторах событий на рис. 3.11.

4. Определение критического пути на основании временных параметров событий. Как известно, критические события не имеют резерва времени. Поэтому критический путь пройдет по событиям 1, 3, 4, 5, 6. Сумма продолжительности критических работ должна быть равна критическому сроку проекта. Проверим это:

$$t(1,3) + t(3,4) + t(4,5) + t(5,6) = 4 + 5 + 4 + 5 = 18 = t_{кр}.$$

Критический путь выделен на сетевом графике.

5. Определение параметров работ. Критические работы, как и критические события, резервов времени не имеют. Поэтому будем рассматривать только некритические работы. Расчеты полного резерва времени и других параметров для некритических работ приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2. **Параметры нектритических работ примера**

Работа	$t_{рн}(i, j)$	$t_{ро}(i, j)$	$t_{по}(i, j)$	$R(i, j)$
(1,2)	0	2	3	1
(2,3)	2	3	4	1
(2,4)	2	4	9	5
(2,6)	2	5	18	13

Ранний срок начала работы совпадает с ранним сроком свершения начального события работы:

$t_{рн}(1,2) = t_р(1) = 0;$

$t_{рн}(2,3) = t_р(2) = 2$ и т. д.

Ранний срок окончания работы рассчитывается как сумма раннего срока начала и продолжительности работы:

$t_{ро}(1,2) = t_{рн}(1,2) + t(1,2)= 0 + 2 = 2;$

$t_{ро}(2,3) = t_{рн}(2,2) + t(2,3)= 2 + 1 = 3$ и т. д.

Поздний срок окончания работы совпадает с поздним сроком свершения конечного события работы:

$t_{по}(1,2) = t_п(2) = 3;$

$t_{по}(2,3) = t_п(3) = 4$ и т. д.

Резерв времени работы равен разности между поздним и ранним сроками ее окончания:

$R(1,2) = t_{по}(1,2) – t_{ро}(1,2) = 3 – 2 = 1;$

$R(2,3) = t_{по}(2,3) – t_{ро}(2,3) = 4 – 3 = 1$ и т. д.

Итак, данный проект может быть выполнен за 18 дней. При этом работы a_1, a_4, a_6 и a_7 являются критическими, т. е. должны быть выполнены точно в срок. Работы a_2, a_3, a_5 и a_8 имеют резервы времени, т. е. они могут быть начаты позже или выполняться дольше, чем их объявленная продолжительность, на величину этого резерва. При этом срок выполнения всего проекта не изменится.

7.3. Задания для самостоятельной работы

Вариант 1. Торговая фирма рассматривает возможность перевода одного из своих магазинов на самообслуживание. Перечень необходимых работ приведен в табл. 3.3.

Необходимо сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время выполнения проекта.

Таблица 3.3. **Работы по переводу магазина на самообслуживание**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Составление сметы	a_1	–	5
Приобретение оборудования	a_2	a_1	10
Составление сметы	a_1	–	5
Подбор кадров	a_3	a_1	6
Монтаж оборудования	a_4	a_2	6
Подготовка кадров	a_5	a_3	3
Оформление торгового зала	a_6	a_4	8
Доставка товаров	a_7	a_1	6
Заказ и получение ценников	a_8	a_1	8

Окончание табл. 3.3

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Заказ и получение форменной одежды	a_9	a_3	14
Выкладка товаров	a_{10}	a_7, a_6	2
Заполнение ценников	a_{11}	a_8	4
Открытие магазина	a_{12}	a_9, a_{10}, a_{11}	3

Ответ: $t_{кр} = 34$.

Вариант 2. Фирма "Астра" запланировала реконструкцию своего офиса. Перечень работ, которые необходимо для этого выполнить, приведен в табл. 3.4.

Необходимо сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время выполнения проекта.

Таблица 3.4. **Работы по реконструкции офиса**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Определение объема реконструкции	a_1	–	5
Выбор проекта реконструкции	a_2	a_1	5
Составление сметы затрат	a_3	a_1	10
Выбор строительной организации	a_4	a_3	3
Получение финансового обеспечения	a_5	a_3	5
Экономическое обоснование проекта	a_6	a_2	4
Привязка проекта к условиям фирмы	a_7	a_6	5
Составление договора на выполнение работ	a_8	a_4, a_7	3
Работа по реконструкции	a_9	a_5, a_8	25

Ответ: $t_{кр} = 47$.

Вариант 3. Предприятие рассматривает предложение о строительстве новой турбазы. Работы, которые следует выполнить перед началом строительства, приведены в табл. 3.5.

Необходимо сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время выполнения проекта.

Таблица 3.5. **Работы по строительству новой турбазы**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Определить место строительства	a_1	–	3
Разработать первоначальный проект	a_2	a_1	8
Получить разрешение на строительство	a_3	a_1	15
Выбрать архитектурную мастерскую	a_4	a_2	3
Заключить договор с архитектурной мастерской	a_5	a_3, a_4	5
Разработать смету затрат на строительство	a_6	a_1	4
Закончить разработку проекта	a_7	a_5	5
Получить финансовое обеспечение	a_8	a_6	3
Нанять подрядчика	a_9	a_7, a_8	2

Ответ: $t_{кр} = 30$.

Вариант 4. Процесс организации поставки товаров покупателю на оптовой базе райпотребсоюза может быть представлен в виде некоторого комплекса работ (табл. 3.6).

Требуется сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого процесса.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требуемое на поставку товара.

Таблица 3.6. **Работы по поставке товара покупателю на оптовой базе райпотребсоюза**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, часы
Отбор товаров	a_1	–	2
Подготовка к отправке	a_2	a_1	3

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, часы
Выписка накладных	a_3	a_1	1
Проверка цен	a_4	a_3	1
Оформление отчета	a_5	a_3	1
Таксировка	a_6	a_2, a_4	1
Заказ автомашины и погрузка товаров	a_7	a_2, a_4	5
Отправление счета в банк и покупателю	a_8	a_5, a_6	1
Оплата счета	a_9	a_8	25
Перевозка товаров	a_{10}	a_7	10
Выгрузка и сверка с документами	a_{11}	a_9, a_{10}	4

Ответ: $t_{кр} = 36$.

Вариант 5. В табл. 3.7. приведен перечень работ по организации выставки образцов продукции.

Требуется сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого комплекса работ.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требуемое для организации выставочного зала.

Таблица 3.7. **Работы по организации выставки**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Отбор образцов	a_1	–	5
Изготовление рекламных материалов	a_2	a_1	3
Изготовление стендов	a_3	a_1	10
Доставка образцов в выставочный зал	a_4	a_1	2
Доставка стендов в выставочный зал	a_5	a_3	2
Монтаж стендов	a_6	a_5	5
Установка образцов на стендах	a_7	a_4, a_6	3
Оформление зала рекламными материалами	a_8	a_7, a_2	2
Репетиция открытия выставки	a_9	a_8	1

Ответ: $t_{кр} = 28$.

Вариант 6. Иванова А. И. собирается отметить с друзьями и сослуживцами свой 60-летний юбилей. Перечень работ по организации праздника приведен в табл. 3.8.

Необходимо сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требующееся на подготовку праздника.

Таблица 3.8. **Работы по организации юбилея**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, часы
Составление списка приглашенных	a_1	–	1
Выбор помещения	a_2	a_1	5
Рассылка приглашений	a_3	a_1	2
Составление меню	a_4	a_1	4
Подготовка музыкального сопровождения	a_5	a_1	3
Подготовка помещения для проведения праздника	a_6	a_2	6
Уточнение списка приглашенных	a_7	a_3	1
Покупка продуктов	a_8	a_4	8
Приготовление ужина	a_9	a_8	7
Сервировка стола	a_{10}	a_7, a_6, a_9	3

Ответ: $t_{кр} = 23$.

Вариант 7. Университет рассматривает проект открытия нового дисплейного класса. Перечень работ приведен в табл. 3.9.

Требуется сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требующееся на реализацию проекта.

Таблица 3.9. **Работы по открытию нового дисплейного класса**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Выбор помещения	a_1	–	2
Покупка мебели	a_2	–	5
Покупка ПК	a_3	–	4
Ремонт помещения	a_4	a_1	15
Доставка мебели	a_5	a_2	3
Монтаж сетевого оборудования	a_6	a_4	6
Доставка ПК	a_7	a_3	2
Установка мебели	a_8	a_5, a_6	8
Установка ПК	a_9	a_7, a_8	10

Ответ: $t_{кр} = 41$.

Вариант 8. На мебельной фабрике предполагается организовать производство новой модели мягкой мебели. Перечень необходимых для этого работ приведен в табл. 3.10.

Требуется сделать следующее:

1. Построить сетевой график этого проекта.
2. Рассчитать временные параметры событий и работ.
3. Определить минимальное время, требующееся на организацию производства новой модели.

Таблица 3.10. **Состав работ по организации производства мягкой мебели**

Содержание работы	Обозначение	Предшествующие работы	Продолжительность, дней
Разработка эскиза	a_1	–	6
Разработка лекал и чертежей	a_2	a_1	10
Настройка оборудования для производства новой модели	a_3	a_1	7
Покупка материалов	a_4	a_2	3
Изготовление деталей каркаса	a_5	a_3, a_4	4
Раскрой обивочной ткани	a_6	a_3, a_4	1
Раскрой поролона	a_7	a_3, a_4	1
Сборка каркаса	a_8	a_5	1
Пошив чехлов	a_9	a_6	5
Сборка изделия	a_{10}	a_7, a_8, a_9	2

Ответ: $t_{кр} = 27$.

Контрольные вопросы

1. Какие практические задачи могут быть решены с помощью метода сетевого планирования?
2. Что собой представляет сетевой график? Моделями чего являются его элементы и график в целом?
3. Перечислите виды работ. Как они изображаются на сетевом графике?
4. Что такое событие? Какие события называются исходными и завершающими?
5. Как обозначаются события, работы и продолжительности работ?
6. Каковы правила построения сетевых графиков?
7. Что такое критический путь? Какую роль он играет в методе сетевого планирования?
8. Перечислите временные параметры событий. Дайте их смысловое определение и объясните методику расчета.
9. Перечислите временные параметры работ. Как они могут быть рассчитаны?

Лабораторная работа 8.
Оптимизация сетевого графика

8.1. Основные теоретические сведения

Можно выделить две основные постановки задачи оптимизации сетевого графика:

1. Минимизация времени выполнения проекта при заданных ресурсах:

$$F = t_{кр} \to \min,$$

$$r \le r^{выд},$$

где r – требуемые ресурсы;

$r^{выд}$ – выделенные ресурсы.

2. Минимизация требуемых ресурсов, обеспечивающих выполнение проекта в заданный период времени:

$$F = r \to \min,$$

$$t_{кр} \le t^{зад}.$$

Рассмотрим задачу 1 (минимизация времени выполнения проекта). Сокращение времени выполнения работ может быть достигнуто за счет вложения в них некоторых ресурсов. Такими ресурсами являются, например, трудовые ресурсы или машины, а также универсальный ресурс – финансы. При вложении дополнительного количества финансов в работу сокращение ее длительности достигается за счет:

а) найма дополнительного количества рабочих;

б) улучшения организации работ;

в) автоматизации производственных процессов;

г) применения передовых технологий и т. д.

Далее в качестве ресурса будем рассматривать только финансы. При этом будем считать, что каждая работа a_i характеризуется некоторой трудоемкостью Q_i, а время выполнения работы t_i обратно пропорционально величине вложенных в нее финансов r_i:

$$t_i = \frac{Q_i}{r_i} \quad (i = \overline{1,n}),$$

где n – количество работ проекта.

Однако насыщение любой работы финансами не беспредельно. Для каждой работы существует минимально возможное время ее выполнения, которое определяется технологическими особенностями этой работы:

$$t_i \ge d_i \quad (i = \overline{1,n}),$$

где d_i – минимально возможное время выполнения работы.

Критический срок проекта зависит как от длительностей работ этого проекта t_i, так и от логической последовательности и взаимозависимости работ. Обозначим: L – логическая зависимость работ. Тогда критический срок проекта можно представить в виде функции:

$$t_{кр} = f(L,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n).$$

Функция f чаще всего не имеет конкретного математического вида, но легко может быть задана в приложении MS Excel с помощью цепочки ссылок и простейших функций.

Сокращение времени выполнения проекта возможно как за счет внутренних резервов, так и внешних дополнительных средств. В первом случае у работ, имеющих резервы времени, забирают ресурсы и передают их работам, лежащим на критическом пути. Это позволяет сократить длительность критических работ. В случае использования внешних дополнительных средств, их также стараются вложить сначала в критические работы. Однако критический путь при этом может измениться и дальнейшее вложение ресурсов в те же работы станет неэффективным. Поэтому задача оптимизации как внутренних резервов, так и внешних дополнительных средств не является тривиальной. Для ее эффективного решения необходимо составить задачу математического программирования и решить ее на ЭВМ.

Оптимальный план перераспределения финансов является решением следующей задачи нелинейного программирования:

$$F = t_{кр} \to \min;$$

$$\begin{cases} t_{кр} = f(L, t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_n); \\ t_i = \dfrac{Q_i}{r_i}\,(i = \overline{1,n}); \\ t_i \ge d_i\,(i = \overline{1,n}); \\ \sum\limits_{i=1}^{n} r_i \le r^{выд}. \end{cases} \qquad (3.8)$$

Если $r^{выд}$ – это то же количество ресурсов, что планировалось вначале, то имеем задачу отыскания внутренних резервов. Если же $r^{выд} > r^{выд}_{нач}$, то это задача оптимизации вложения дополнительных средств.

8.2. Пример решения задачи

Дан сетевой график комплекса работ, рассмотренный в лабораторной работе 7 (проект участия в выставке-ярмарке туристских услуг). Это график изображен на рис. 3.12. Над дугами графика показаны наименования работ, а в скобках – их длительности. При этом предполагается, что в каждую работу вложено 10 ед. финансов: $r_{(1,2)} = r_{(1,3)} = r_{(2,3)} = \ldots = 10$, а трудоемкость каждой работы составляет величину, в 10 раз большую числа, показанного над соответствующей дугой графика: $Q_{(1,2)} = 20$, $Q_{(1,3)} = 40$, $Q_{(2,3)} = 10$ и т. д. Таким образом, длительности работ, рассчитываемые по формуле

$$t_i = \frac{Q_i}{r_i} \quad (i = \overline{1,8}),$$

равны тем величинам, которые показаны на сетевом графике в скобках возле каждой работы.

Необходимо решить задачу минимизации критического срока проекта путем перераспределения ресурсов между работами (изыскание внутренних резервов), а также в случае, если в проект дополнительно вкладывается 10 ед. финансов.

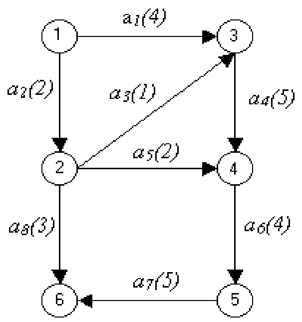

Рис. 3.12. **Исходный сетевой график**

Порядок выполнения работы

1. Подготовка таблиц. На рабочем листе MS Excel заведем две таблицы, в которых мы будем рассчитывать параметры событий (рис. 3.13) и параметры работ (рис. 3.14).

	A	B	C	D	E	F
1	Параметры событий					
2	№ события	Закан раб-ты	Начина-ются работы	Ранний срок свершения	Поздний срок свершения	Резерв
3	1	-	а1,а2			
4	2	а2	а3,а5,а8			
5	3	а1,а3	а4			
6	4	а4,а5	а6			
7	5	а6	а7			
8	6	а7,а8	-			

Рис. 3.13. **Таблица для расчета параметров событий**

В первой таблице для каждого события укажем работы, для которых это событие является конечным (столбец B). В столбце C перечислим работы, для которых это событие является начальным. Таким образом, будет задана логическая последовательность работ данного сетевого графика. Во второй таблице для каждой работы укажем шифр (номер начального события и номер конечного события), а также ее длительность.

9	Параметры работ						
10	Работа	Шифр	Длитель-ность	Ранний срок начала	Ранний срок окончания	Поздний срок оконч.	Полный резерв
11	а1	(1;3)	4				
12	а2	(1;2)	2				
13	а3	(2;3)	1				
14	а4	(3;4)	5				
15	а5	(2;4)	2				
16	а6	(4;5)	4				
17	а7	(5;6)	5				
18	а8	(2;6)	3				

Рис. 3.14. **Таблица для расчета параметров работ**

2. Определение параметров событий и работ. Сначала рассчитаем параметры событий. На рис. 3.15. показана таблица в режиме представления формул.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Параметры событий						
2	№ события	Закан раб-ты	Начинаются работы	Ранний срок свершения	Поздний срок свершения	Резерв	
3	1	-	a1,a2	0	=МИН(E5-C11;E4-C12)	=E3-D3	
4	2	a2	a3,a5,a8	=D3+C12	=МИН(E5-C13;E6-C15;E8-C18)	=E4-D4	
5	3	a1,a3	a4	=МАКС(D3+C11;D4+C13)	=E6-C14	=E5-D5	
6	4	a4,a5	a6	=МАКС(D5+C14;D4+C15)	=E7-C16	=E6-D6	
7	5	a6	a7	=D6+C16	=E8-C17	=E7-D7	
8	6	a7,a8	-	=МАКС(D7+C17;D4+C18)	=D8	=E8-D8	
9	Параметры работ						
10	Работа	Шифр	Длительность	Ранний срок начала	Ранний срок окончания	Поздний срок оконч.	Полный резерв
11	a1	(1;3)	4	=D3	=D11+C11	=E5	=F11-E11
12	a2	(1;2)	2	=D3	=D12+C12	=E4	=F12-E12
13	a3	(2;3)	1	=D4	=D13+C13	=E5	=F13-E13
14	a4	(3;4)	5	=D5	=D14+C14	=E6	=F14-E14
15	a5	(2;4)	2	=D4	=D15+C15	=E6	=F15-E15
16	a6	(4;5)	4	=D6	=D16+C16	=E7	=F16-E16
17	a7	(5;6)	5	=D7	=D17+C17	=E8	=F17-E17
18	a8	(2;6)	3	=D4	=D18+C18	=E8	=F18-E18

Рис. 3.15. **Расчеты параметров событий и работ**

При расчете раннего срока свершения события воспользуемся следующими правилами:

- вычисления производятся последовательно от исходного события до завершающего;
- ранний срок свершения исходного события равен нулю: D3=0;
- если событием заканчивается только одна работа, то ранний срок свершения события равен сумме раннего срока свершения начального события этой работы и ее длительности: D4=D3+C12 и т. д.;
- если событием заканчиваются несколько работ, то нужно найти максимум этих сумм по всем входящим в событие работам:

D5=МАКС(D3+C11;D4+C13);

D6=МАКС(D5+C14;D4+C15) и т. д.

При вычислении позднего срока свершения события следует придерживаться следующих правил:

- расчеты выполняются в обратном порядке, от завершающего события к исходному.
- поздний срок свершения завершающего события равен его раннему сроку свершения: E8=D8;
- если событием начинается только одна работа, то его поздний срок свершения равен разности между поздним сроком конечного события этой работы и ее длительностью: E7=E8–C17, E6=E7–C16 и т. д.;
- если событием начинается несколько работ, то его поздний срок свершения вычисляется как минимум этих разностей по всем исходящим работам: E4=МИН(E5–C13;E6–C15;E8–C18); E3=МИН(E5–C11; E4–C12).

Резерв времени события вычисляется как разность позднего и раннего срока свершения события.

Параметры работ вычисляются на основании параметров событий.

Ранний срок начала работы равен раннему сроку свершения того события, которым работа начинается: D11=D3 и т. д.

Ранний срок окончания работы вычисляется как сумма раннего срока начала работы и ее длительности: E11=D11+C11 и т. д.

Поздний срок окончания работы равен позднему сроку свершения события, которым работа заканчивается: F11=E5 и т. д.

Полный резерв времени работы вычисляется как разность позднего и раннего срока окончания работы: G11=F11-E11 и т. д.

Результаты расчетов параметров работ приведены на рис. 3.16.

9	Параметры работ						
10	Работа	Шифр	Длительность	Ранний срок начала	Ранний срок окончания	Поздний срок оконч.	Полный резерв
11	a1	(1;3)	4	0	4	4	0
12	a2	(1;2)	2	0	2	3	1
13	a3	(2;3)	1	2	3	4	1
14	a4	(3;4)	5	4	9	9	0
15	a5	(2;4)	2	2	4	9	5
16	a6	(4;5)	4	9	13	13	0
17	a7	(5;6)	5	13	18	18	0
18	a8	(2;6)	3	2	5	18	13

Рис. 3.16. **Результаты расчетов параметров работ**

После определения резервов времени работ становится ясно, какие работы принадлежат критическому пути. Резервы времени критических работ равны нулю. Работы критического пути должны следовать друг за другом (составлять полный путь). Очевидно, что в нашей задаче критическому пути принадлежат работы a_1, a_4, a_6 и a_7. Таким образом, до выполнения оптимизации критический путь следующий: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$.

3. Подготовка данных для построения линейного графика. В принципе все необходимые для построения линейного графика работ данные уже нами получены. Для удобства построений сведем эти данные вместе (рис. 3.17).

	H	I	J
9	Параметры диаграммы		
10	Ожидание	Длительность	Резерв
11	=D11	=C11	=G11
12	=D12	=C12	=G12
13	=D13	=C13	=G13
14	=D14	=C14	=G14
15	=D15	=C15	=G15
16	=D16	=C16	=G16
17	=D17	=C17	=G17
18	=D18	=C18	=G18

Рис. 3.17. **Подготовка данных для линейной диаграммы**

Столбец *Ожидание* будет показывать время, на которое отложено начало работы относительно начала всего проекта. В этот столбец перенесем данные столбца *Ранний срок начала работы*.

Столбец *Длительность* равен длительности работы, т. е. представляет собой копию столбца C.

Столбец *Резерв* показывает, на какое время можно отложить начало работы или увеличить ее длительность. Этот столбец представляет собой копию столбца G.

4. Построение линейного графика. Выделим несмежные диапазоны с шифрами работ (в нашем случае B10:B18) и параметрами диаграммы (H10:J18).С помощью *Мастера диаграмм* построим линейный график работ как показано на рис. 3.18. Следует выбрать тип диаграммы *Линейчатая с накоплением*.

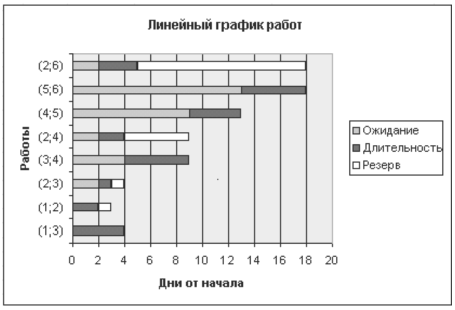

Рис. 3.18. **Линейный график работ**

5. Подготовка исходных данных для задачи оптимизации внутренних резервов. В столбцы K и L занесем заданные в условии величины трудоемкости работ и выделенных для каждой работы ресурсов (рис. 3.19). В ячейку L20 занесем формулу суммы всех ресурсов, требуемых под данный проект: СУММ(L11:L18). В ячейку L21 запишем число, равное количеству выделенных ресурсов, которое необходимо распределить между работами. Поскольку решается сначала задача оптимизации внутренних резервов, в ячейке L21 будет та же величина, что получена в ячейке L20 (в нашем случае – 80).

Изменим столбец C, записав вместо чисел формулы расчета длительностей работ: C11=K11/L11, C12=K12/L12 и т. д.

	K	L
10	Требуемая трудоемкость	Выделенные ресурсы
11	40	10
12	20	10
13	10	10
14	50	10
15	20	10
16	40	10
17	50	10
18	30	10
19		
20	Итого ресурсов	80
21	Выделено ресурсов	80

Рис. 3.19. **Исходные данные по трудоемкости и ресурсам**

6. Решение задачи оптимизации длительности проекта с помощью надстройки *Поиск решения*. Задача оптимизации длительности проекта может быть записана в виде формулы (3.8). При этом предполагается, что длительность любой работы не может быть меньше 1, т. е. $d_i = 1 \ (i = \overline{1,8})$.

Окно надстройки *Поиск решения* для данной задачи нелинейного программирования показано на рис. 3.20. В окне *Параметры* флажок *Линейная модель* устанавливать не нужно.

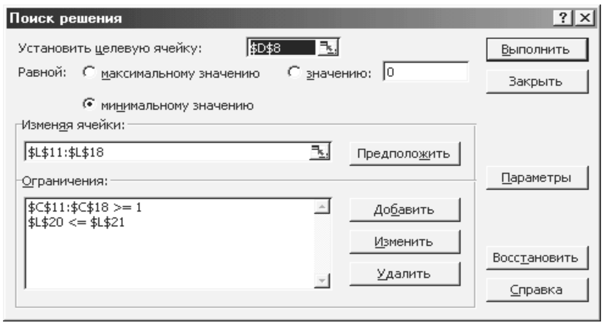

Рис. 3.20. **Окно *Поиск решения* для задачи оптимизации критического срока проекта**

После нажатия кнопки *Выполнить* надстройка *Поиск решения* находит наилучший результат перераспределения ресурсов между работами (рис. 3.21).

	A	B	C	D	E	F	G	L
2	№ события	Закан раб-ты	Начинаются работы	Ранний срок свершения	Поздний срок свершения	Резерв		
3	1	-	а1,а2	0	8,882E-16	8,9E-16		
4	2	а2	а3,а5,а8	2,93599	2,9359943	1,6E-09		
5	3	а1,а3	а4	3,9814	3,9814018	0		
6	4	а4,а5	а6	7,25469	7,2546903	0		
7	5	а6	а7	10,2557	10,255685	0		
8	6	а7,а8	-	13,529	13,528974	0		
9	Параметры работ							
10	Работа	Шифр	Длительность	Ранний срок начала	Ранний срок окончания	Поздний срок оконч.	Полный резерв	Выделенные ресурсы
11	а1	(1;3)	3,9814	0	3,9814018	3,9814	0	10,04671
12	а2	(1;2)	2,93599	0	2,9359943	2,93599	2E-09	6,812002
13	а3	(2;3)	1	2,93599	3,9359943	3,9814	0,0454	10
14	а4	(3;4)	3,27329	3,9814	7,2546903	7,25469	0	15,27516
15	а5	(2;4)	4,3187	2,93599	7,2546903	7,25469	2E-09	4,631028
16	а6	(4;5)	3,00099	7,25469	10,255685	10,2557	0	13,32891
17	а7	(5;6)	3,27329	10,2557	13,528974	13,529	0	15,27516
18	а8	(2;6)	6,47804	2,93599	9,4140383	13,529	4,1149	4,631028
19								
20						Итого ресурсов		80
21					Выделено ресурсов			80

Рис. 3.21. **Результаты оптимизации внутренних резервов**

7. Анализ решения задачи оптимизации внутренних резервов.

Основные результаты решения этой задачи показаны на рис. 3.21. Таким образам, длительность всего проекта сократилась на 4,5 дня (18 – 13,5) (см. ранний срок свершения события 6) за счет перераспределения финансов между работами. При этом имеем два критических пути: 1 → 3 → 4 → 5 → 6 и 1 → 2 → 4 → 5 → 6. В этом легко убедиться, рассчитав их длительности. Резервы времени всех работ уменьшились. Более-менее значительный резерв теперь имеет только работа (2,6). Это также хорошо видно на линейном графике работ (рис. 3.22).

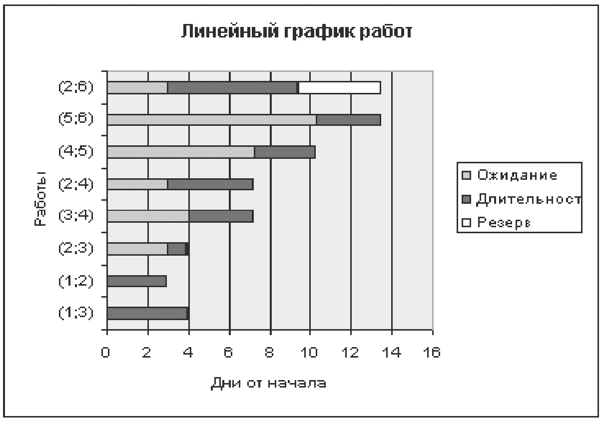

Рис. 3.22. **Линейный график работ после оптимизации**

8. Решение задачи распределения ресурсов при условии дополнительного вложения 10 ед. ресурсов. Решение этой задачи полностью аналогично предыдущей. Измените количество выделенных ресурсов в ячейке L21 на 90 ед. Вызовите надстройку *Поиск решения* и нажмите кнопку *Выполнить*, не изменяя установок в окне поиска. Результат решения задачи оптимизации дополнительных ресурсов показан на рис. 3.23. Как видно из рисунка, критический срок сократился до 11,5 дней. Небольшой резерв имеет только работа (2,6). Поэтому любой из полных путей 1 → 2 → 3→ 4 → 5 → 6, 1 → 2 → 4 → 5 → 6 и 1 → 3 → 4 → 5 → 6 можно считать критическим.

	A	B	C	D	E	F	G	L
1	Параметры событий							
2	№ события	Закан раб-ты	Начинаются работы	Ранний срок свершения	Поздний срок свершения	Резерв		
3	1	-	a1,a2	0	-4,441E-16	-4E-16		
4	2	a2	a3,a5,a8	2,33714	2,3371393	0		
5	3	a1,a3	a4	3,33883	3,3388323	5,7E-10		
6	4	a4,a5	a6	6,40778	6,4077806	0		
7	5	a6	a7	8,83308	8,8330755	0		
8	6	a7,a8	-	11,5434	11,543405	0		
9	Параметры работ							
10	Работа	Шифр	Длительность	Ранний срок начала	Ранний срок окончания	Поздний срок оконч.	Полный резерв	Выделенные ресурсы
11	a1	(1;3)	3,33883	0	3,3388323	3,33883	6E-10	11,98024
12	a2	(1;2)	2,33714	0	2,3371393	2,33714	0	8,55747
13	a3	(2;3)	1	2,33714	3,3371393	3,33883	0,0017	10
14	a4	(3;4)	3,06895	3,33883	6,4077806	6,40778	6E-10	16,29223
15	a5	(2;4)	4,07064	2,33714	6,4077806	6,40778	0	4,913231
16	a6	(4;5)	2,42529	6,40778	8,8330755	8,83308	0	16,49284
17	a7	(5;6)	2,71033	8,83308	11,543405	11,5434	0	18,44794
18	a8	(2;6)	9,04689	2,33714	11,384033	11,5434	0,1594	3,316055
20							Итого ресурсов	90
21							Выделено ресурсов	90

Рис. 3.23. **Результаты решения задачи оптимизации распределения дополнительных средств**

8.3. Задания для самостоятельной работы

Выполните оптимизацию критического срока проекта для задания из лабораторной работы 7. Ниже приведены ответы, позволяющие оценить степень успеха этой оптимизации.

Вариант 1. До оптимизации $t_{кр}$ = 34; после перераспределения внутренних резервов $t_{кр}$ = 24,6; после дополнительного вложения 10 ед. финансов $t_{кр}$ = 22,2.

Вариант 2. До оптимизации $t_{кр}$ = 47; после перераспределения внутренних резервов $t_{кр}$ = 34,5; после дополнительного вложения 10 ед. финансов $t_{кр}$ = 31,3.

Вариант 3. До оптимизации $t_{кр}$ = 30; после перераспределения внутренних резервов $t_{кр}$ = 22,6; после дополнительного вложения 10 ед. финансов $t_{кр}$ = 20,3.

Вариант 4. До оптимизации $t_{кр}$ = 36; после перераспределения внутренних резервов $t_{кр}$ = 21,7; после дополнительного вложения 10 ед. финансов $t_{кр}$ = 19.

Вариант 5. До оптимизации $t_{кр}$ = 28; после перераспределения внутренних резервов $t_{кр}$ = 21; после дополнительного вложения 10 ед. финансов $t_{кр}$ = 19.

Вариант 6. До оптимизации $t_{кр}$ = 23; после перераспределения внутренних резервов $t_{кр}$ = 16; после дополнительного вложения 10 ед. финансов $t_{кр}$ = 14.

Вариант 7. До оптимизации $t_{кр}$ = 41; после перераспределения внутренних резервов $t_{кр}$ = 25,7; после дополнительного вложения 10 ед. финансов $t_{кр}$ = 23.

Вариант 8. До оптимизации $t_{кр}$ = 27; после перераспределения внутренних резервов $t_{кр}$ = 23,6; после дополнительного вложения 10 ед. финансов $t_{кр}$ = 20,3.

Контрольные вопросы

1. Как может быть сформулирована постановка задачи оптимизации проекта, заданного сетевым графиком?
2. Почему при вложении дополнительного количества финансов в работу сокращается ее продолжительность?
3. В какие работы сетевого графика следует вкладывать дополнительные финансы в первую очередь?
4. Почему задача оптимального распределения ресурсов является сложной и должна решаться на ЭВМ?
5. Приведите математическую модель задачи оптимального распределения ресурсов между работами проекта. К какому классу задач ее можно отнести?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособие для вузов / В. В. Федосеев [и др.] ; под ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 2001.

Экономико-математические методы и модели : учеб. пособие / Н. И. Холод [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Мн. : БГЭУ, 2000.

Костевич, Л. С. Теория игр. Исследование операций / Л. С. Костевич, А. А. Лапко. – Мн. : Выш. шк., 1982.

Кузнецов, А. В. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод [и др.] ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн. : Выш. шк., 1995.

Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию : учеб. пособие / А. В. Кузнецов, Н. Н. Холод, Л. С. Костевич ; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – 2-е изд. – Мн. : Выш. шк., 2001.

Минюк, С. А. Математические методы и модели в экономике : учеб. пособие / С. А. Минюк, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмич. – Мн. : ТетраСистемс, 2002.

Гарнаев, В. П. Использование MS Excel и VBA в экономике и финансах / В. П. Гарнаев. – СПб. : BHV, 1999.

Курицкий, Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0 / Б. Я. Курицкий. – СПб. : BHV, 1997.

Юферева, О. Д. Экономико-математические методы и модели : сб. задач / О. Д. Юферева. – Мн. : БГЭУ, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Практикум к лабораторным занятиям
для студентов экономических специальностей

В пяти частях
Часть 1

Авторы-составители:
Еськова Оксана Ивановна
Заяц Татьяна Александровна
Бондарева Валентина Викторовна

Редактор Т. Ф. Рулинская
Компьютерная верстка И. Г. Лейковская

Подписано в печать 30.09.05. Бумага типографская № 1.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Таймс. Ризография.
Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 6,8. Тираж 500 экз. Заказ №

УО “Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации”.
ЛИ № 02330/0056814 от 02.03.2004 г.
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.

Отпечатано в УО “Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации”.
246029, г. Гомель, просп. Октября, 50.